МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ УКРАЇНИ

НАЦІОНАЛЬНИЙ ТЕХНІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ УКРАЇНИ

«КИЇВСЬКИЙ ПОЛІТЕХНІЧНИЙ ІНСТИТУТ»

Новикова Г.К., Массалітіна Є.В.

РОЗВ'ЯЗАННЯ В ПОЛЯРНІЙ СИСТЕМІ КООРДИНАТ ГЕОМЕТРИЧНИХ ЗАДАЧ ЗА ДОПОМОГОЮ ВИЗНАЧЕНОГО ІНТЕГРАЛА

Методичний посібник до вивчення дисципліни

«Вища математика» для студентів усіх спеціальностей

Київ

НТУУ «КПІ»

2016

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ УКРАЇНИ

НАЦІОНАЛЬНИЙ ТЕХНІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ УКРАЇНИ

«КИЇВСЬКИЙ ПОЛІТЕХНІЧНИЙ ІНСТИТУТ»

РОЗВ'ЯЗАННЯ В ПОЛЯРНІЙ СИСТЕМІ КООРДИНАТ ГЕОМЕТРИЧНИХ ЗАДАЧ ЗА ДОПОМОГОЮ ВИЗНАЧЕНОГО ІНТЕГРАЛА

Методичний посібник до вивчення дисципліни

«Вища математика» для студентів усіх спеціальностей

Рекомендовано Науково-методичною радою з математики

фізико-математичного факультету НТУУ «КПІ»

Київ

НТУУ «КПІ»

2016

Розв’язання в полярній системі координат геометричних задач за допомогою визначеного інтеграла. Методичний посібник до вивчення дисципліни «Вища математика» для студентів усіх спеціальностей / Уклад.: Г.К. Новикова, Є.В. Массалітіна. К.: НТУУ «КПІ», 2016. – 70 с.

Гриф надано Науково-методичною радою
з математики фізико-математичного факультету НТУУ «КПІ»
Протокол №3 від 17.03.2016 р.

Навчальне видання

РОЗВ’ЯЗАННЯ В ПОЛЯРНІЙ СИСТЕМІ КООРДИНАТ ГЕОМЕТРИЧНИХ ЗАДАЧ ЗА ДОПОМОГОЮ ВИЗНАЧЕНОГО ІНТЕГРАЛА

Методичний посібник до вивчення дисципліни
«Вища математика» для студентів усіх спеціальностей

Укладачі: *Новикова Ганна Костянтинівна, канд. фіз.-мат. наук, доц.,*
Массалітіна Євгенія Вікторівна, канд. фіз.-мат. наук, доц.

Відповідальний редактор: *Дудкін М.Є., доктор фіз.-мат. наук, проф.*

Рецензент: *Ординська З.П., канд. фіз.-мат. наук, доц.*

За редакцією укладачів

Надруковано з оригінал-макета замовника

Методичний посібник «Розв'язання в полярній системі координат геометричних задач за допомогою визначеного інтеграла» містить п'ять розділів: полярні координати та побудова кривих, заданих своїм рівнянням в полярній системі координат, застосування полярних координат до розв'язання навчальних задач що містяться в збірниках задач [1], [2] на знаходження площі криволінійного сектора, довжини дуги кривої, об'ємів тіл та площі поверхні обертання. В кожному з розділів наводяться короткі теоретичні відомості та рисунки.

Методичний посібник може бути корисним студентам усіх спеціальностей, а також викладачам під час проведення практичних занять.

1. ПОЛЯРНІ КООРДИНАТИ. ПОБУДОВА КРИВИХ, ЗАДАНИХ СВОЇМ РІВНЯННЯМ В ПОЛЯРНІЙ СИСТЕМІ КООРДИНАТ

Полярні координати деякої точки *A* на площині – це два числа ρ і φ, що визначають положення цієї точки відносно деякої фіксованої точки *O* (**полюса**) і деякого фіксованого променя $O\rho$ (**полярної осі**). Перша координата ρ точки *A* називається **полярним радіусом**, вона визначає відстань від точки *A* до полюсу: $|OA| = \rho$. Друга координата φ називається **полярним кутом**. Вона визначає кут, на який треба так повернути вісь $O\rho$ в додатньому чи від'ємному напрямку, щоб ця вісь зайняла положення променя *OA* (рис. 1). Полярний кут вважається додатнім за умовою його відліку від полярної осі в напрямку, протилежному напрямку руху годинникової стрілки і вважається

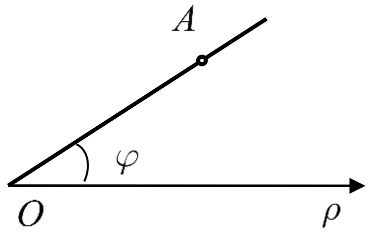


Рис. 1

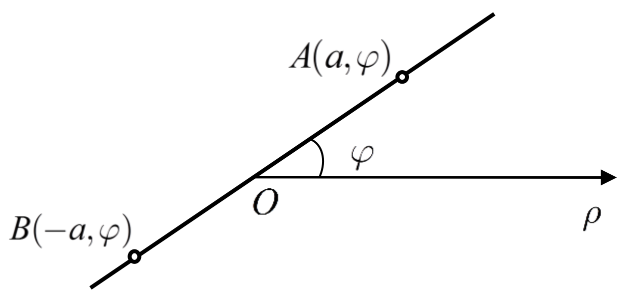


Рис. 2

від'ємним за напрямком руху годинникової стрілки.

Якщо в полярній системі координат домовитися довжину полярного радіуса вважати невід'ємною, тобто $0 \le \rho < \infty$, а полярний кут вибирати з проміжку $0 \le \varphi < 2\pi$, то між точками площини і полярними координатами $(\rho;\varphi)$ буде встановлена взаємно однозначна відповідність, за винятком полюсу, який не має конкретного полярного кута.

В деяких задачах необхідно брати значення полярного кута φ і значення полярного радіуса ρ в межах від $-\infty$ до ∞. Від'ємні значення φ відкладають від полярної осі за напрямком, який співпадає з напрямком руху годинникової стрілки, а від'ємні значення ρ – на продовженні променя *OA* з протилежного боку від полюса (рис. 2). Тоді значення φ з проміжку $[0;2\pi]$, або з проміжку $[-\pi;\pi]$ називають **головним**. В цьому випадку довільна пара координат $(\rho;\varphi)$ визначає на площині єдину точку, а кожній точці площини відповідає множина пар чисел.

Нехай x і y – декартові координати довільної точки *A*, а ρ і φ – полярні координати цієї точки. Тоді **перехід від полярних координат до декартових** здійснюється за формулами

$$\begin{cases} x = \rho\cos\varphi, \\ y = \rho\sin\varphi. \end{cases} \qquad (1)$$

Перехід від декартових координат до полярних здійснюється за формулами

$$\begin{cases} \rho = \sqrt{x^2 + y^2}, \\ \operatorname{tg}\varphi = \dfrac{y}{x}, \end{cases} \qquad (2)$$

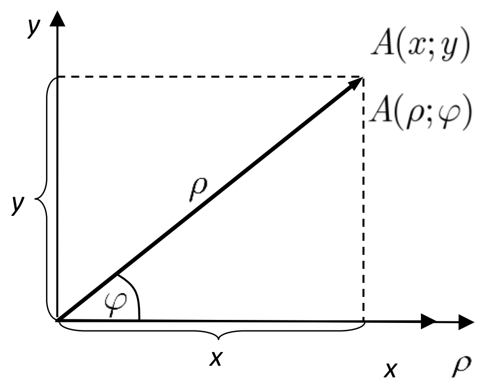


Рис. 3

причому, обчислюючи φ з останньої формули, треба враховувати знаки x і y. Зауважимо, що декартова система координат при цьому вибрана так, що її початок збігається з полюсом полярної системи координат, а вісь абсцис Ox – з полярною віссю (рис. 3).

Розглянемо приклади побудови деяких ліній на площині.

Приклад 1. Побудувати прямі лінії, що задані своїми рівняннями в полярній системі координат: **1)** $\rho = \dfrac{a}{\cos\varphi}$; **2)** $\rho = \dfrac{a}{\sin\varphi}$;

3) $\rho = \dfrac{ab}{b\cos\varphi + a\sin\varphi}$; **4)** $\varphi = \operatorname{arctg} k$, де числа $a > 0$, $b > 0$, $k > 0$.

Для побудови цих прямих розглянемо прямокутну декартову систему координат, вісь абсцис якої збігається з полярною віссю, а початок координат – з полюсом. Рівняння цих прямих в обраній таким чином системі координат мають відповідно вигляд:

1) $\rho = \dfrac{a}{\cos\varphi} \quad \Rightarrow \quad \rho\cos\varphi = a \quad \Rightarrow \quad x = a$ (рис. 4);

2) $\rho = \dfrac{a}{\sin\varphi} \quad \Rightarrow \quad \rho\sin\varphi = a \quad \Rightarrow \quad y = a$ (рис.5);

3) $\rho = \dfrac{ab}{b\cos\varphi + a\sin\varphi} \quad \Rightarrow \quad b\rho\cos\varphi + a\rho\sin\varphi = ab \quad \Rightarrow \quad \dfrac{x}{a} + \dfrac{y}{b} = 1$ (рис. 6);

4) $\varphi = \operatorname{arctg} k \quad \Rightarrow \quad tg\varphi = k \quad \Rightarrow \quad \rho\sin\varphi = k \cdot \rho\cos\varphi \quad \Rightarrow \quad y = k \cdot x$ (рис. 7).

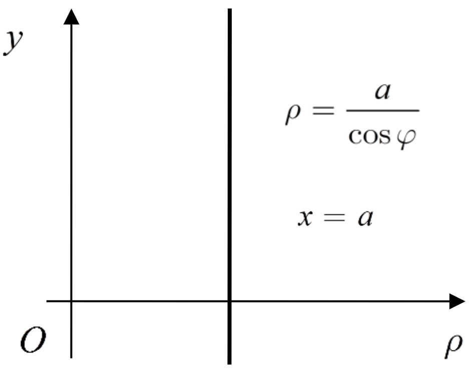


Рис. 4

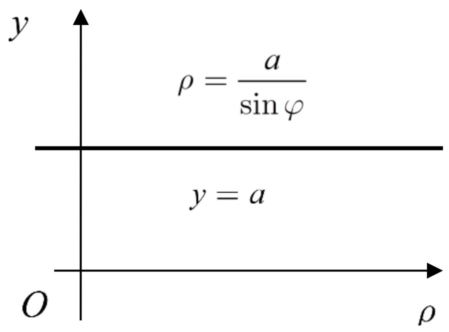


Рис. 5

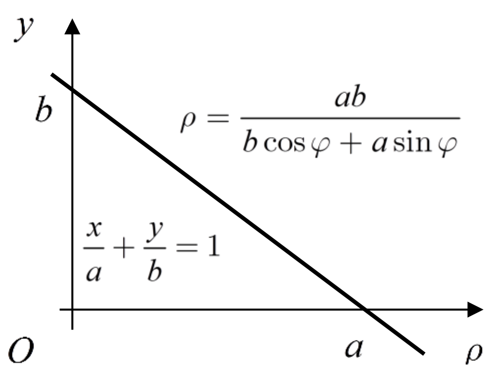


Рис. 6

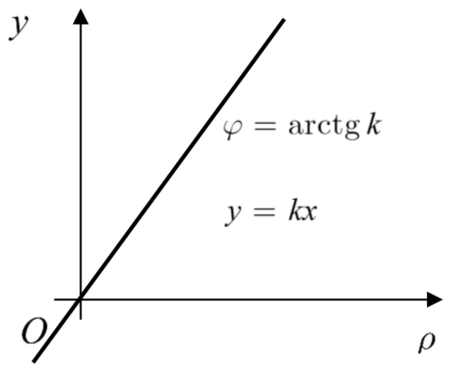


Рис. 7

Приклад 2. Побудувати кола, задані своїми рівняннями в полярній системі координат:

1) $\rho^2 - 2\rho(a\cos\varphi + b\sin\varphi) = c^2$; **2)** $\rho = a\cos\varphi + b\sin\varphi$;

3) $\rho = a\sin\varphi$; **4)** $\rho = a\cos\varphi$.

Для побудови цих кривих розглянемо прямокутну декартову систему координат, вісь абсцис якої збігається з полярною віссю, а початок координат – з полюсом. Перейдемо в кожному з заданих вище рівнянь від полярних координат до декартових за формулами (1).

1) Рівняння $\rho^2 - 2\rho(a\cos\varphi + b\sin\varphi) = c^2$ в обраній декартовій системі координат має вигляд:

$$x^2 + y^2 - 2ax - 2by = c^2 \quad \text{або} \quad (x-a)^2 + (y-b)^2 = c^2 + a^2 + b^2.$$

Позначивши $c^2 + a^2 + b^2 = R_1^2$, одержимо рівняння $(x-a)^2 + (y-b)^2 = R_1^2$ кола з центром в точці $O_1(a;b)$ і радіусом R_1.

Наприклад, якщо $a > 0$ і $b > 0$, то коло зображене на рис. 8.

2) Рівняння $\rho = a\cos\varphi + b\sin\varphi$ також перепишемо в декартовій системі координат, користуючись формулами (1) та (2):

$$\sqrt{x^2 + y^2} = \frac{ax}{\sqrt{x^2 + y^2}} + \frac{by}{\sqrt{x^2 + y^2}} \quad \text{або} \quad x^2 + y^2 = ax + by.$$

Одержимо рівняння $\left(x - \frac{a}{2}\right)^2 + \left(y - \frac{b}{2}\right)^2 = \frac{a^2 + b^2}{4}$ кола з центром в точці $O_2\left(\frac{a}{2};\frac{b}{2}\right)$ і радіусом $R_2 = \frac{1}{2}\sqrt{a^2 + b^2}$. З рівняння кола видно, що

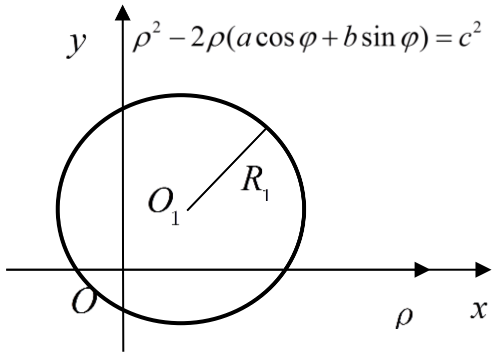


Рис. 8

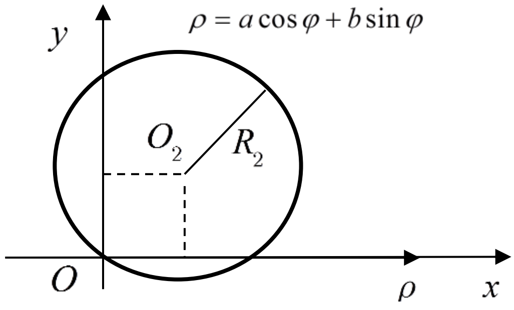


Рис. 9

воно проходить через полюс. Наприклад, при $a > 0$, $b > 0$, коло зображене на рис. 9.

3) Рівняння $\rho = a\sin\varphi$ в декартових координатах набуває вигляду

$$\sqrt{x^2+y^2} = \frac{ay}{\sqrt{x^2+y^2}} \qquad \text{або} \qquad x^2+y^2 = ay.$$

Після перетворень одержимо рівняння $x^2 + \left(y - \frac{a}{2}\right)^2 = \frac{a^2}{4}$ кола з центром в точці $O_3\left(0;\frac{a}{2}\right)$ і радіусом $R_3 = \frac{a}{2}$, яке проходить через полюс, а центр його знаходиться на осі Oy. При $a > 0$ $(a < 0)$ кола зображені на рис. 10.

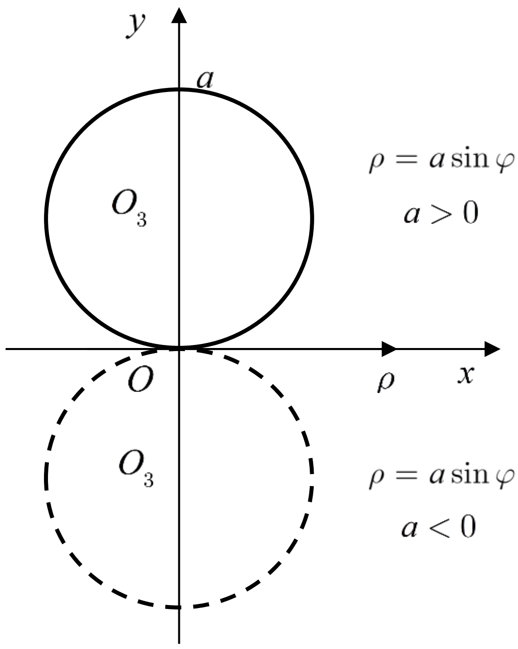


Рис. 10

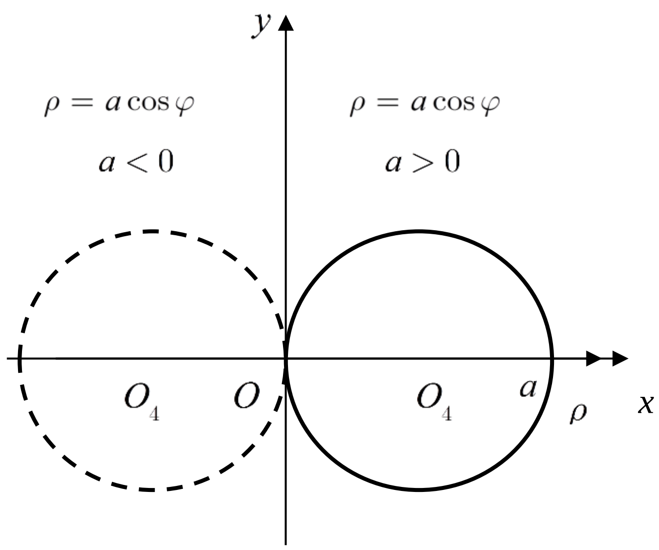


Рис. 11

4) Користуючись тими самими міркуваннями, що і при побудові кола з попереднього прикладу, неважко встановити, що коло, задане рівнянням $\rho = a\cos\varphi$, в прямокутній декартовій системі координат має вигляд $\left(x - \frac{a}{2}\right)^2 + y^2 = \frac{a^2}{4}$, точка $O_4\left(\frac{a}{2};0\right)$– центр цього кола, а $R_4 = \frac{a}{2}$ – радіус. Коло проходить через полюс і має центр, розташований на осі Ox. При $a > 0$ $(a < 0)$ кола зображені на рис. 11.

Взагалі, існує декілька методів побудови кривих, заданих своїм рівнянням в полярній системі координат. В деяких випадках графіки цих кривих можна побудувати по точкам.

Приклад 3. Побудуємо криву, яка має назву **спіраль Архімеда**[1] та в полярній системі координат задається рівнянням $\rho = a\,\varphi$, $a > 0$, і яке розглянемо за умовою $\rho \geq 0$.

Складемо таблицю значень для $\varphi \geq 0$, надаючи φ значення через певні проміжки, наприклад через $\frac{\pi}{4}$:

φ	0	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{3\pi}{4}$	π	$\frac{5\pi}{4}$	$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{7\pi}{4}$	2π	$\frac{9\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{2}$	$\frac{11\pi}{4}$	3π
$\rho = a\varphi$	0	$0,8a$	$1,6a$	$2,5a$	$3,1a$	$3,9a$	$4,7a$	$5,5a$	$6,9a$	$7,1a$	$7,9a$	$8,7a$	$9,5a$

Значення ρ в таблиці наведені наближені. Після побудови точок з координатами, вказаними в таблиці, з'єднаємо їх плавною кривою та одержимо графік функції $\rho = a\,\varphi$ (рис. 12, при $a = 1$).

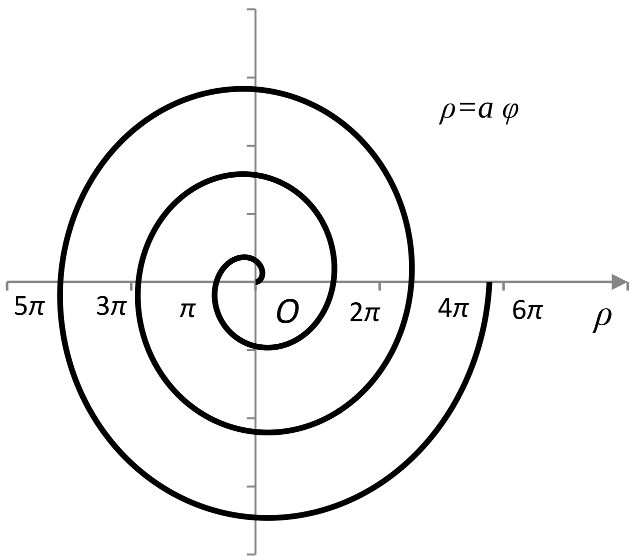


Рис. 12

Розглянемо ще один метод побудови графіків функцій в полярній системі координат, який полягає в тому, що для побудови графіка функції $\rho = f(\varphi)$, будують спочатку в декартовій системі координат графік функції $y = f(x)$, за допомогою якого досліджують поведінку функції $\rho = f(\varphi)$, а потім будують графік функції $\rho = f(\varphi)$.

Наведемо приклади використання цього методу при побудові деяких кривих, заданих своїми рівняннями в полярній системі координат.

---

[1] **Спіраль Архімеда** — крива, яку описує точка *M* під час її рівномірного руху зі швидкістю v уздовж прямої, що рівномірно обертається в площині навколо однієї зі своїх точок *O* з кутовою швидкістю ω. Спіраль названо ім'ям Архімеда, який вивчив її властивості.

Якщо в початковий момент руху точки *M* і *O* збігаються, а полярна вісь збігається з початковим розташуванням рухомої прямої, то рівняння спіралі Архімеда в полярних координатах має вигляд $\rho = a\,\omega$.

Приклад 4. Побудувати графік **двопелюсткової троянди**[2] $\rho = \sin 2\varphi$. Функція розглядається за умови $\rho \geq 0$.

Спочатку побудуємо в декартовій системі координат графік функції $y = \sin 2x$ (рис. 13), з якого видно, що якщо куту x надавати

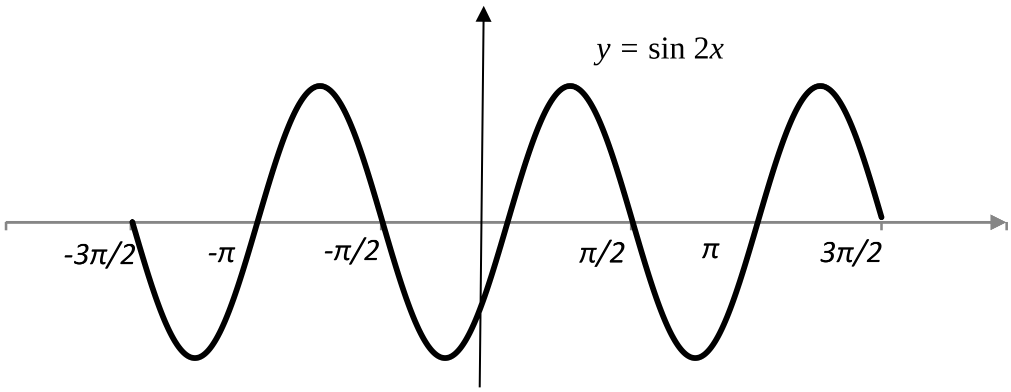


Рис. 13

послідовно значення від 0 до $\frac{\pi}{4}$, то функція $y = \sin 2x$ буде монотонно зростати. Тому при побудові в полярній системі координат кривої, заданої своїм рівнянням $\rho = \sin 2\varphi$, на сторонах кутів, які беруться з проміжку $\left[0; \frac{\pi}{4}\right]$, ми будемо відкладати тим більші значення ρ, чим більшим буде кут φ. З'єднуючи побудовані точки плавною кривою, одержимо частину графіка, яка відповідає інтервалу $\left[0; \frac{\pi}{4}\right]$ (рис.14). Якщо далі збільшувати кут від $\frac{\pi}{4}$ до $\frac{\pi}{2}$ (рис.13), то функція $\rho = \sin 2\varphi$ буде спадати, пробігаючи ті ж самі значення, які вона набувала для значень φ з попереднього проміжку (зауважимо, що симетрія

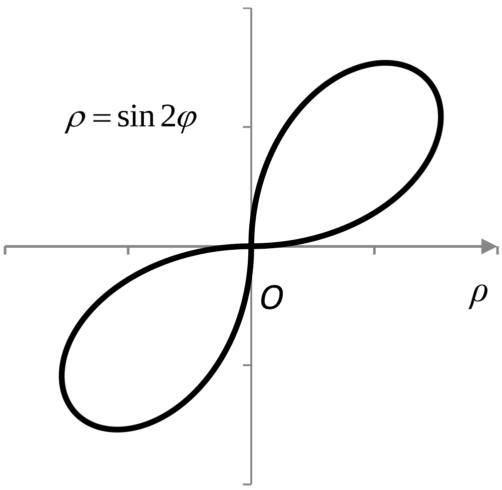


Рис. 14

---

[2] **Троянда** — плоска крива, яка нагадує символічне зображення квітки. Рівняння цієї кривої в полярній системі координат має вигляд $\rho = a\sin k\varphi$, де число k визначає кількість пелюсток ($k>1$), а число a – розмір пелюстки. Вся крива складається з однакових по формі і розміру пелюсток і розміщена в середині кола радіуса a.

синусоїди відносно прямої $x=\dfrac{\pi}{4}$ на проміжку $\left[0;\dfrac{\pi}{4}\right]$ свідчить про симетрію двопелюсткової троянди відносно променя $\varphi=\dfrac{\pi}{4}$ в полярній системі координат). Проміжок, на якому φ змінюється в межах від $\dfrac{\pi}{2}$ до π ми не розглядаємо, оскільки на цьому проміжку не виконується умова $\rho\ge 0$, а точки кривої $\rho=\sin 2\varphi$ при $\varphi\in\left[0;\dfrac{\pi}{2}\right]$ утворюють перший пелюсток троянди. Аналогічно будуємо криву $\rho=\sin 2\varphi$ на проміжку $\varphi\in\left[\pi;\dfrac{3\pi}{2}\right]$, де виконується умова $\rho\ge 0$ і ці точки кривої будуть утворювати другий пелюсток. В усіх інших проміжках зміни кута φ, на яких виконується умова $\rho\ge 0$, графік кривої буде збігатися з графіками вже побудованих пелюсток.

Приклад 5. Побудувати графік функції $\rho=\cos 2\varphi$ (**двопелюсткова троянда**). Функція розглядається за умовою $\rho\ge 0$.

Помітимо, що з рівності $\rho=\cos 2\varphi$ випливає рівність $\rho\left(\varphi+\dfrac{\pi}{4}\right)=\cos 2\left(\varphi+\dfrac{\pi}{4}\right)=\cos\left(2\varphi+\dfrac{\pi}{2}\right)=\sin 2\varphi$, тобто якщо графік функції $\rho=\cos 2\varphi$ обертати на кут $\dfrac{\pi}{4}$ в напрямку, протилежному напрямку руху годинникової стрілки, то одержимо графік функції $\rho=\sin 2\varphi$, побудований вище.

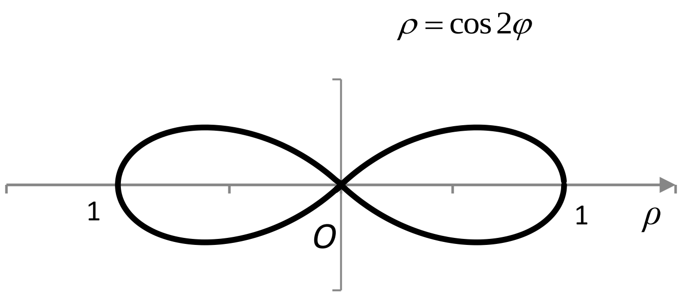


Рис. 15

Звідси висновок: для того, щоб побудувати графік функції $\rho=\cos 2\varphi$, треба побудований вище графік функції $\rho=\sin\varphi$ повернути за годинниковою стрілкою на кут $\dfrac{\pi}{4}$ (рис. 15).

Приклад 6. Побудувати графік функції $\rho = 3\cos 5\varphi$ (**п'ятипелюсткова троянда**).

Побудуємо спочатку графік функції $y = 3\cos 5x$ (рис. 16) та

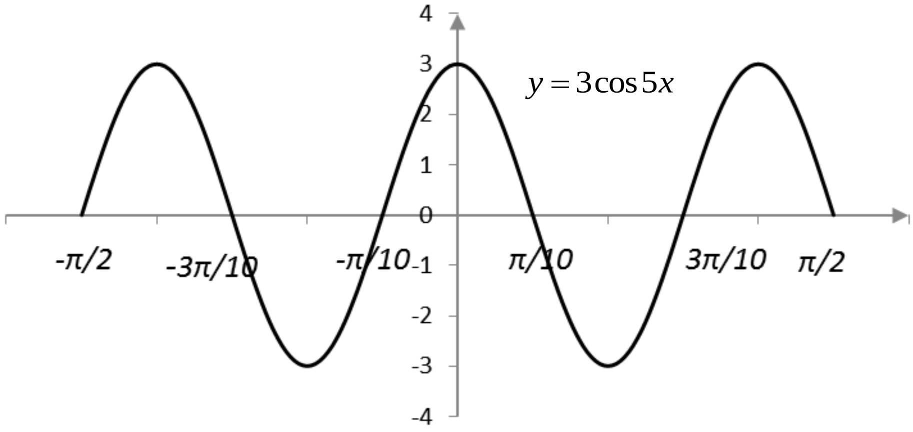


Рис. 16

дослідимо за допомогою цього графіка поведінку функції $\rho = 3\cos 5\varphi$ на проміжку $\varphi \in \left[-\frac{\pi}{10}; \frac{\pi}{10} \right]$ так само, як ми це робили в попередньому прикладі. Після цього будуємо криву $\rho = 3\cos 5\varphi$ на цьому проміжку. Оскільки умова $\rho \geq 0$ виконується для $\varphi \in \left[-\frac{\pi}{10} + \frac{2k\pi}{5}; \frac{\pi}{10} + \frac{2k\pi}{5} \right]$, то наступні пелюстки кривої будуть розташовані відповідно в кутових проміжках $\left[\frac{3\pi}{10}; \frac{\pi}{2} \right]$, $\left[\frac{7\pi}{10}; \frac{9\pi}{10} \right]$, $\left[\frac{11\pi}{10}; \frac{13\pi}{10} \right]$ та $\left[\frac{3\pi}{2}; \frac{17\pi}{10} \right]$. Остаточно одержимо графік, зображений на рисунку 17.

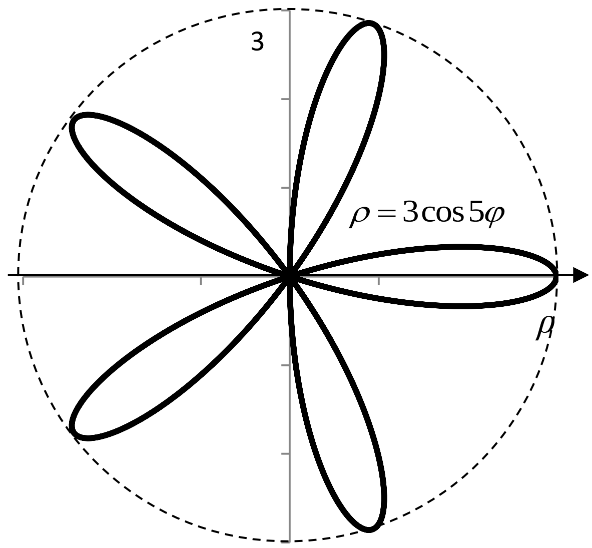


Рис. 17

Приклад 7. Побудувати графік функції $\rho = a\,\mathrm{tg}\,\varphi$, розглядаючи її за умовою $\rho \geq 0$.

Розв'яжемо нерівність $\operatorname{tg}\varphi \ge 0$. Розв'язком її є множина значень φ, які задовольняють умові $\varphi \in \left[k\pi;\ \frac{\pi}{2}+k\pi\right)$, $k \in \mathbb{Z}$. Оскільки функція $y = a\operatorname{tg}\varphi$ непарна, то графік функції $\rho = \operatorname{tg}\varphi$ буде симетричним відносно полюсу. Функція $\rho = a\operatorname{tg}\varphi$ періодична з періодом π.

Враховуючи симетрію та періодичність функції $\rho = a\operatorname{tg}\varphi$, достатньо побудувати її графік для $\varphi \in \left[0;\ \frac{\pi}{2}\right)$. Оскільки функція $y = a\operatorname{tg}\varphi$ зростає на проміжку $\left[0;\ \frac{\pi}{2}\right)$, то при побудові графіка функції $\rho = a\operatorname{tg}\varphi$ треба враховувати той факт, що при зміні φ за годинниковою стрілкою, значення ρ зменшуються. Графік функції $\rho = a\operatorname{tg}\varphi$ проходить через точку *O*, її вертикальні асимптоти мають рівняння $\varphi = \frac{\pi}{2}(2k+1)$, $k \in \mathbb{Z}$, похилих асимптот немає. Після обертання на кут π графіка функції $\rho = a\operatorname{tg}\varphi$, побудованого для $0 \le \varphi \le \frac{\pi}{2}$, дістанемо графік цієї функції для $\pi \le \varphi < \frac{3}{2}\pi$ (рис. 18).

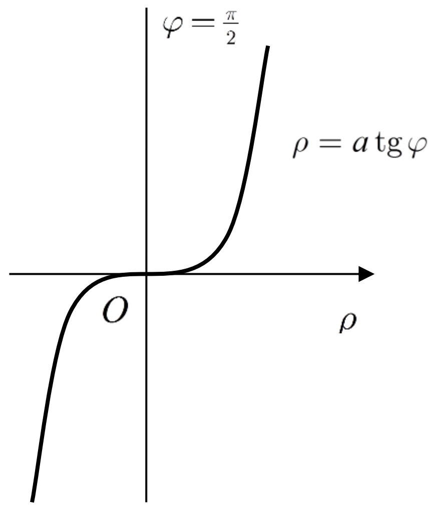


Рис. 18

Приклад 8. Побудувати криву, задану рівнянням $(x^2+y^2)^2 = a^2(x^2-y^2)$.

Ця крива називається **лемніскатою Бернуллі**[3]. За умовою її рівняння $(x^2+y^2)^2 = a^2(x^2-y^2)$ задане в декартовій прямокутній

---

[3] **Лемніската Бернуллі** — ГМТ, добуток відстаней від яких до двох заданих точок (фокусів) незмінний та рівний квадрату половини відстані між фокусами $r_1 \cdot r_2 = c^2$.

Це крива 4-го порядку, яка за формою нагадує вісімку. Автор цієї кривої, швейцарський математик Якоб Бернуллі (J. Bernoulli), дав їй поетичну назву «лемніската» (1694). У античному Римі так називали бантик, за допомогою якого прикріплювали вінок до голови переможця у спортивних іграх.

системі координат. Розглянемо полярну систему координат, полярна вісь якої співпадає з віссю абсцис, а полюс – з початком координат.

Тоді за допомогою формул (1) в заданому рівнянні перейдемо від декартових координат до полярних і це рівняння в полярній системі координат набуває більш простого вигляду: $\rho^2 = a^2 \cos 2\varphi$.

Оскільки ліва частина останнього рівняння набуває лише

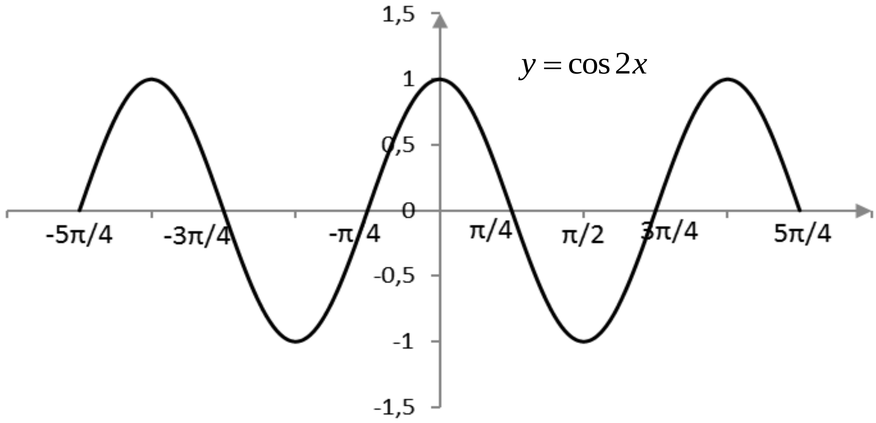


Рис. 19

невід'ємних значень, то спочатку знайдемо ті значення φ, для яких виконується умова $\cos 2\varphi \geq 0$. Розв'язавши цю нерівність, одержимо: $-\frac{\pi}{2} + 2k\pi \leq 2\varphi \leq \frac{\pi}{2} + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$, звідки одержимо умову: $\varphi \in \left[-\frac{\pi}{4} + k\pi;\ \frac{\pi}{4} + k\pi \right]$, $k \in \mathbb{Z}$, причому ліва частина рівняння $\rho^2 = a^2 \cos 2\varphi$ набуває своє максимальне значення при $\varphi = 0$ і це максимальне значення дорівнює a^2. Функція ρ^2 набуває своє мінімальне значення при $\varphi = \frac{\pi}{4}$ і це мінімальне значення дорівнює нулю.

Враховуючи інтервали монотонності функції $y = \cos 2x$ та симетрію її графіка (рис. 19), одержимо рисунок лемніскати Бернуллі (рис. 20).

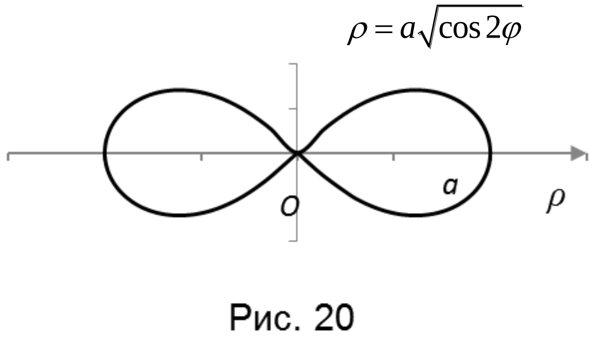


Рис. 20

Приклад 9. Побудувати **кардіоїди**[4], задані своїми рівняннями:

а) $\rho = a(1+\cos\varphi)$, $a>0$; **б)** $\rho = a(1-\sin\varphi)$, $a>0$.

а) Складемо таблицю значень для $\varphi \ge 0$, надаючи φ значення

φ	0	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{3\pi}{4}$	π	$\frac{5\pi}{4}$	$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{7\pi}{4}$	2π
$\rho = a(1+\cos\varphi)$	$2a$	$a(1+\frac{\sqrt{2}}{2})$	a	$a(1-\frac{\sqrt{2}}{2})$	0	$a(1-\frac{\sqrt{2}}{2})$	a	$a(1+\frac{\sqrt{2}}{2})$	$2a$

через певні проміжки, наприклад через $\frac{\pi}{4}$. Після побудови точок з координатами, вказаними в таблиці, з'єднаємо їх плавною кривою та одержимо графік функції $\rho = a(1+\cos\varphi)$ (рис. 21, при $a=1$).

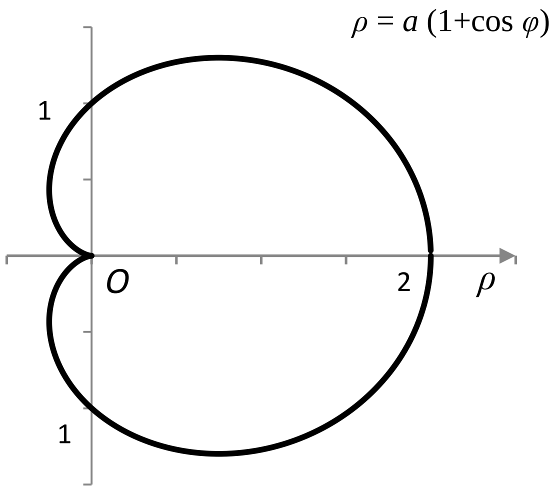


Рис. 21

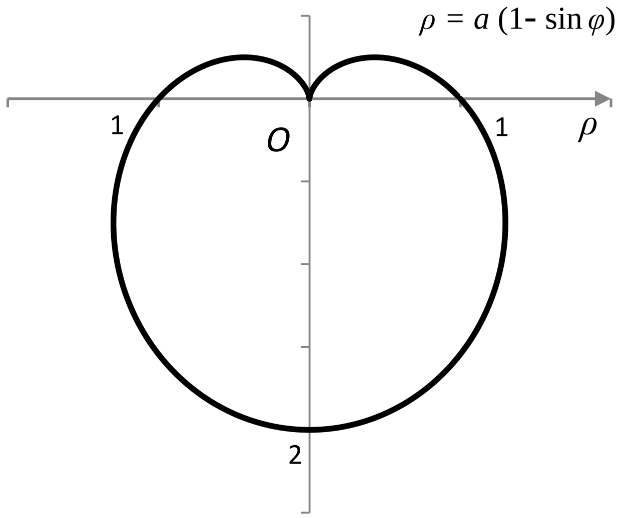


Рис. 22

б) Графік кривої графік кривої $\rho = a(1-\sin\varphi)$ неважко одержати, користуючись тими самими міркуваннями (рис. 22, при $a=1$).

φ	0	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{3\pi}{4}$	π	$\frac{5\pi}{4}$	$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{7\pi}{4}$	2π
$\rho = a(1-\sin\varphi)$	a	$a(1-\frac{\sqrt{2}}{2})$	0	$a(1-\frac{\sqrt{2}}{2})$	a	$a(1+\frac{\sqrt{2}}{2})$	$2a$	$a(1+\frac{\sqrt{2}}{2})$	a

[4] **Кардіоїда** (грец. *καρδία* - серце, грец. *εἶδος* – вид, – разом серцевидна) – плоска лінія, яка описується фіксованою точкою кола, що котиться по нерухомому колу з таким же радіусом.
Отримала свою назву через схожість своїх обрисів зі стилізованим зображенням серця. Кардіоїда є окремим випадком равлика Паскаля, епіциклоїди і синусоїдальної спіралі.

Приклад 10. Побудувати криві, задані рівняннями:

а) $\rho = 3 + \cos 4\varphi$; **б)** $\rho = 2 - \cos 4\varphi$.

а) Для побудови першої кривої, дослідимо функцію $\rho = 3 + \cos 4\varphi$ на монотонність та екстремум за допомогою її першої похідної $\rho'(\varphi) = -4\sin 4\varphi$. Оскільки розв'язок нерівності $\sin 4\varphi \geq 0$ має вигляд $\frac{k\pi}{4} \leq \varphi \leq \frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{4}$, $k \in \mathbb{Z}$, то функція $\rho = 3 + \cos 4\varphi$ монотонно спадає на інтервалі $\left(\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{2}\right)$. При $\varphi = \frac{\pi}{4}$ функція набуває свого мінімального значення, яке дорівнює 2, а при $\varphi = 0$ функція набуває свого максимального значення, яке дорівнює 4. Функція $\rho = 3 + \cos 4\varphi$

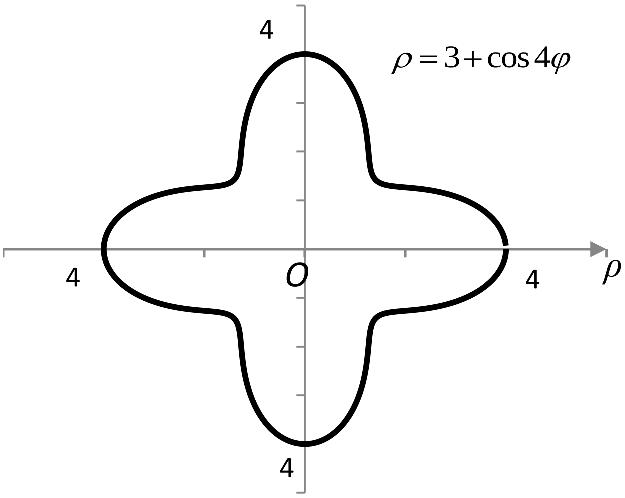


Рис. 23

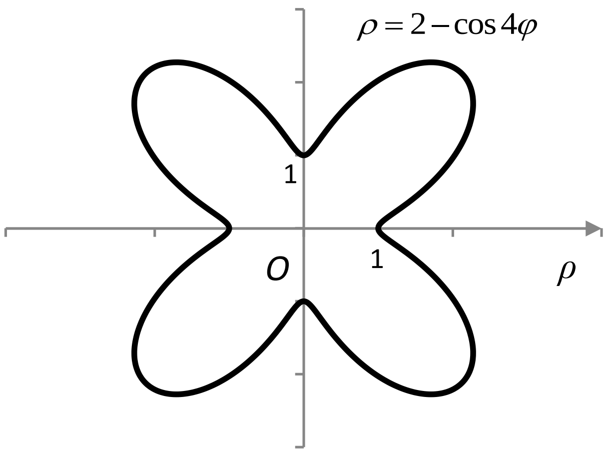


Рис. 24

періодична з періодом $T = \frac{\pi}{2}$. Враховуючи наведені вище дослідження, побудуємо криву $\rho = 3 + \cos 4\varphi$ (рис. 23).

б) Виконуючи аналогічні дослідження і для функції $\rho = 2 - \cos 4\varphi$, також одержимо її графік (рис. 24).

Приклад 11. Побудувати криві, задані рівняннями:

а) $\rho = 2 + \cos 2\varphi$; **б)** $\rho = 2 + \sin\varphi$.

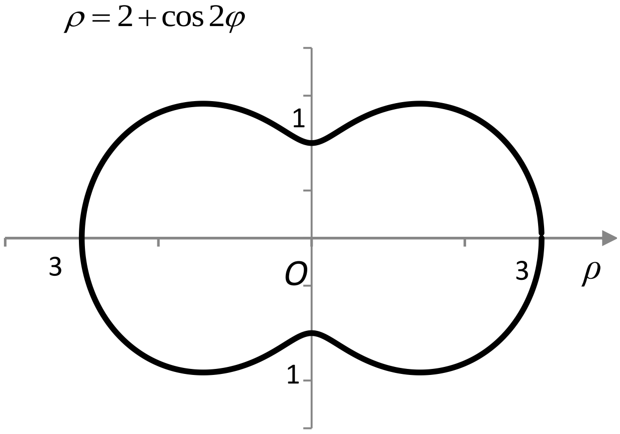


Рис. 25

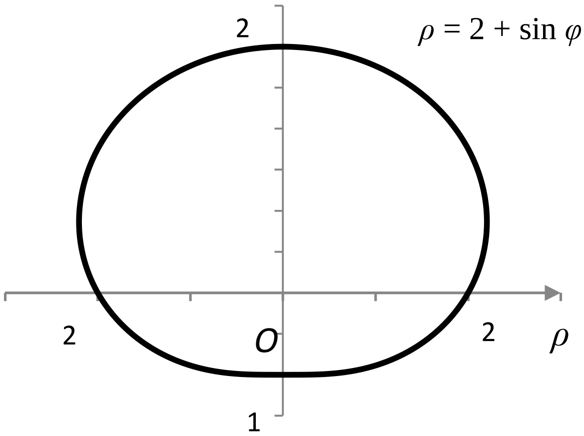


Рис. 26

а) Для побудови першої кривої, дослідимо функцію $\rho = 2 + \cos 2\varphi$ на монотонність та екстремум за допомогою її першої похідної. Оскільки розв'язки нерівності $\sin 2\varphi \geq 0$ можна записати за допомогою формули $k\pi \leq \varphi \leq \dfrac{\pi}{2} + k\pi,\quad k \in \mathbb{Z},$ то функція $\rho = 2 + \cos 2\varphi$ монотонно спадає на проміжку $\left(0;\ \dfrac{\pi}{2}\right)$ та монотонно зростає на проміжку $\left(\dfrac{\pi}{2};\ \pi\right)$. При $\varphi = \dfrac{\pi}{2}$ функція $\rho = 2 + \cos 2\varphi$ набуває свого мінімального значення, яке дорівнює 1, а при $\varphi = 0$ вона набуває свого максимального значення, рівного 3. Функція $\rho = 2 + \cos 2\varphi$ періодична з періодом π.

Враховуючи наведені вище дослідження, побудуємо криву $\rho = 2 + \cos 2\varphi$ (рис. 25).

б) Виконуючи аналогічні дослідження і для функції $\rho = 2 + \sin\varphi$, побудуємо також і цю криву (рис. 26).

Завдання для самостійної роботи. Побудувати криві, задані рівняннями:

а) $(x^2 + y^2)^2 = 2xy;$ **б)** $\rho = a(1 + \sin\varphi)$, $a > 0;$ **в)** $\rho = a(1 - \cos\varphi),\ a > 0.$

2. ЗАСТОСУВАННЯ ПОЛЯРНИХ КООРДИНАТ ДО РОЗВ'ЯЗАННЯ ЗАДАЧ НА ЗНАХОДЖЕННЯ ПЛОЩІ КРИВОЛІНІЙНОГО СЕКТОРА

Площа криволінійного сектора

Нехай в полярній системі координат крива L задана рівнянням $\rho = \rho(\varphi)$, $\alpha \le \varphi \le \beta$.

Криволінійним сектором будемо називати плоску фігуру, обмежену неперервною лінією L: $\rho = \rho(\varphi)$ і двома променями $\varphi = \alpha$, $\varphi = \beta$, $\alpha < \beta$ (рис. 27).

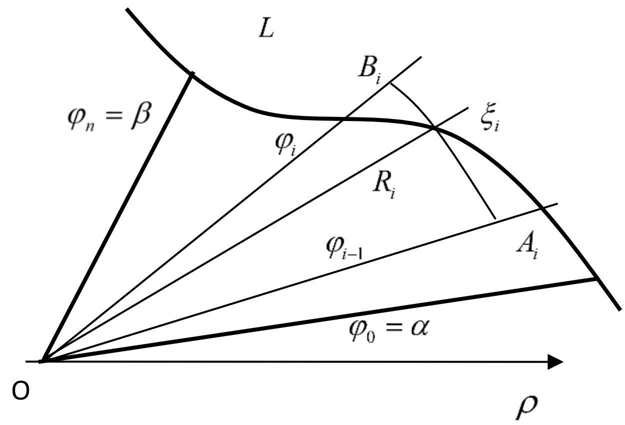


Рис. 27

Знайдемо площу криволінійного сектора.

Розіб'ємо кут $[\alpha, \beta]$ на n частин точками $\alpha = \varphi_0 < \varphi_1 < \ldots < \varphi_n = \beta$. Побудуємо кругові сектори з радіусами $R_i = \rho(\xi_i)$, де $\xi_i \in [\varphi_{i-1}, \varphi_i]$. Розглянемо круговий сектор OA_iB_i та обчислимо його площу

$$S_i = \frac{1}{2} R_i^2 \Delta\varphi_i = \frac{1}{2} \rho^2(\xi_i) \Delta\varphi_i ,$$

де $\Delta\varphi_i = \varphi_i - \varphi_{i-1}$ – центральний кут. Позначимо суму площ всіх секторів

$$S = \sum_{i=1}^{n} S_i = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{2} \rho^2(\xi_i)\, \Delta\varphi_i .$$

Сума S є інтегральною сумою для функції $\frac{1}{2}\rho^2(\varphi)$ на відрізку $\alpha \le \varphi \le \beta$. Границю цієї інтегральної суми при $\lambda = \max\limits_{1 \le i \le n} \Delta\varphi_i \to 0$ приймають за площу криволінійного сектора. Отже, **площу криволінійного сектора обчислюють за формулою**

$$S = \lim_{\lambda \to 0} \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n} \rho^2(\xi_i)\, \Delta\varphi_i = \frac{1}{2} \int_{\alpha}^{\beta} \rho^2(\varphi)\, d\varphi .$$

2495. а) Обчислити площу фігури, яку описує полярний радіус спіралі Архімеда $\rho = a\,\varphi$ при одному його оберті, якщо початку руху відповідає значення полярного кута $\varphi = 0$.

б) Обчислити площу фігури, обмежену другим та третім витком спіралі Архімеда та відрізком полярної осі.

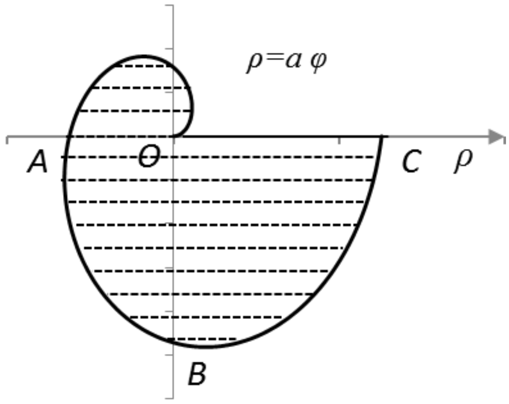


Рис. 28

Розв'язання. а) Нехай $a > 0$. В процесі зміни φ від 0 до 2π, полярний радіус описує криву, яка обмежує криволінійний сектор $OABC$ (рис. 28). Площу криволінійного сектора $OABC$ обчислимо за формулою:

$$S_{OABC} = \frac{1}{2}\int_{\alpha}^{\beta} \rho^2(\varphi)\,d\varphi =$$

$$= \frac{a^2}{2}\int_0^{2\pi} \varphi^2 d\varphi = \frac{a^2}{2}\cdot\frac{\varphi^3}{3}\bigg|_0^{2\pi} = \frac{4}{3}\pi^3 a^2.$$

б) За умовою задачі треба знайти площу фігури між другим та третім витками, тобто площу полоси $ABCDNRFMKN$ (рис. 29). Шукану площу знайдемо як різницю площ фігур $NKMFR$ та $ABCDN$. Тобто

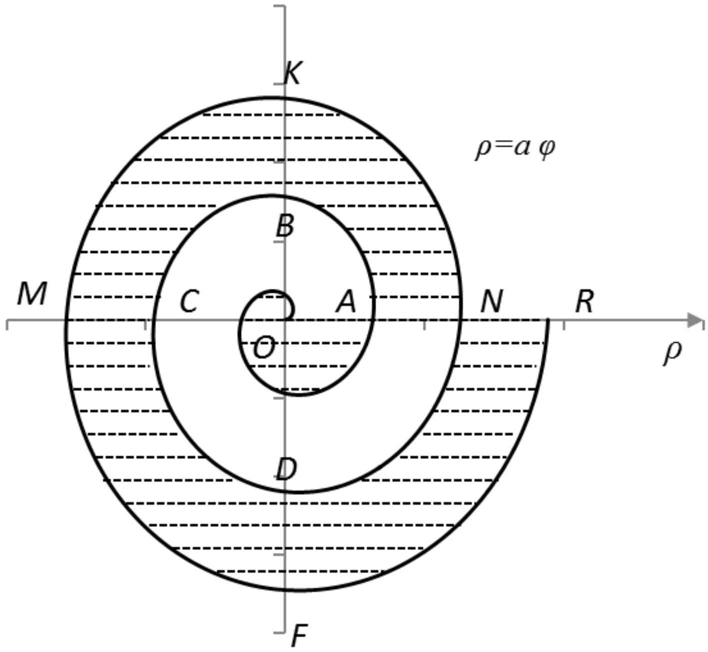


Рис. 29

$$S = S_{NKMFR} - S_{ABCDN} = \frac{1}{2}\int_{\alpha_2}^{\beta_2} \rho^2(\varphi)\,d\varphi - \frac{1}{2}\int_{\alpha_1}^{\beta_1} \rho^2(\varphi)\,d\varphi = \frac{1}{2}\int_{4\pi}^{6\pi} a^2\varphi^2\,d\varphi - \frac{1}{2}\int_{2\pi}^{4\pi} a^2\varphi^2\,d\varphi =$$

$$= \frac{a^2}{6}\varphi^3\Big|_{4\pi}^{6\pi} - \frac{a^2}{6}\varphi^3\Big|_{2\pi}^{4\pi} = \frac{a^2}{6}(216\pi^3 - 64\pi^3 - 64\pi^3 + 8\pi^3) = 16a^2\pi^3.$$

Взагалі, можна довести, що площі фігур, розташованих між послідовними витками спіралі Архімеда, утворюють арифметичну прогресію. Дійсно, кожну площу S_k фігури, обмеженої k-м та $(k+1)$-м витками, а також відрізком полярної осі, можна знайти за формулою:

$$S_k=\frac{1}{2}\int\limits_{2k\pi}^{2(k+1)\pi}a^2\varphi^2d\varphi-\frac{1}{2}\int\limits_{2(k-1)\pi}^{2k\pi}a^2\varphi^2d\varphi=\frac{a^2}{6}\varphi^3\Big|_{2k\pi}^{2(k+1)\pi}-\frac{a^2}{6}\varphi^3\Big|_{2(k-1)\pi}^{2k\pi}=$$

$$=\frac{a^2}{6}(8\pi^3(k+1)^3-8\pi^3k^3)-\frac{a^2}{6}(8\pi^3k^3-8\pi^3(k-1)^3)=$$

$$=\frac{4}{3}a^2\pi^3((k+1)^3-k^3-k^3+(k-1)^3)=8\pi^3ka^2,\quad k\ge 1,\quad k\in N\ .$$

Тоді $$S_{k+1}=8\pi^3(k+1)a^2=S_k+8\pi^3a^2,$$

де S_{k+1} – площа фігури, обмеженої $(k+1)$-м та k-м витками, а також відрізком полярної осі. Одержане співвідношення між S_{k+1} та S_k якраз і свідчить про те, що послідовність $\{S_k,\quad k\in N\}$ є арифметичною прогресією.

6.483. Знайти площу фігури, яка обмежена кардіоїдою $\rho=a\,(1+\sin\varphi)$.

Розв'язок. Площу кардіоїди (рис. 30) будемо обчислювати за формулою

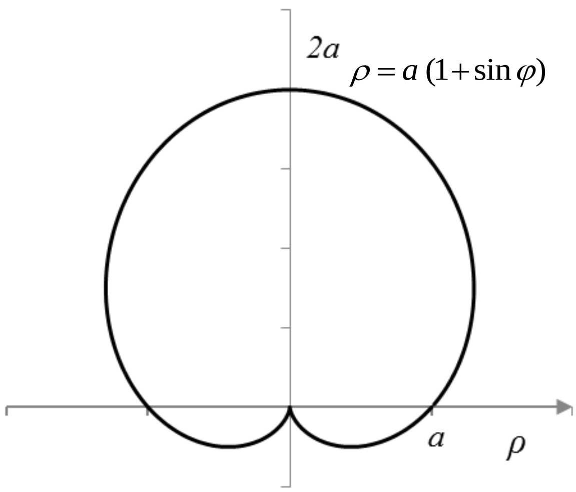


Рис. 30

$$S=\frac{1}{2}\int\limits_{\alpha}^{\beta}\rho^2(\varphi)\,d\varphi=\frac{1}{2}\int\limits_{0}^{2\pi}a^2(1+\sin\varphi)^2\,d\varphi=$$

$$=\frac{a^2}{2}\int\limits_{0}^{2\pi}(1+2\sin\varphi+\sin^2\varphi)\,d\varphi=$$

$$=\frac{a^2}{2}\int\limits_{0}^{2\pi}\left(\frac{3}{2}+2\sin\varphi-\cos 2\varphi\right)d\varphi=$$

$$=\frac{a^2}{2}\left(\frac{3}{2}\varphi-2\cos\varphi-\frac{1}{2}\sin 2\varphi\right)\Bigg|_0^{2\pi}=\frac{3\pi a^2}{2}\ .$$

2496 (6.484). Знайти площу фігури, обмеженої лінією $\rho=a\sin 2\varphi$ (двопелюсткова троянда).

Розв'язок. Користуючись симетрією фігури (див. рис. 14), запишемо:

$$S=4S_1=4\cdot\frac{1}{2}\int_{\alpha}^{\beta}\rho^2(\varphi)\,d\varphi=2\int_0^{\frac{\pi}{4}}a^2\sin^2 2\varphi\,d\varphi=a^2\int_0^{\frac{\pi}{4}}(1-\cos4\varphi)\,d\varphi=$$

$$=a^2\,\varphi\Big|_0^{\frac{\pi}{4}}-\frac{a^2}{4}\sin4\varphi\Big|_0^{\frac{\pi}{4}}=\frac{a^2\pi}{4}.$$

2497. Знайти площу фігури, обмеженої лінією $\rho=a\cos5\varphi$.

Розв'язок. Користуючись симетрією фігури (див. рис. 17), запишемо: $S=10S_1$, де

$$S_1=\frac{1}{2}\int_{\alpha}^{\beta}\rho^2(\varphi)\,d\varphi=\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{10}}a^2\cos^2 5\varphi\,d\varphi=\frac{a^2}{4}\int_0^{\frac{\pi}{10}}(1+\cos10\varphi)\,d\varphi=$$

$$=\frac{a^2}{4}\varphi\Big|_0^{\frac{\pi}{10}}+\frac{a^2}{40}\sin10\varphi\Big|_0^{\frac{\pi}{10}}=\frac{a^2\pi}{40}\quad\Rightarrow\quad S=10S_1=\frac{a^2\pi}{4}.$$

6.485. Знайти площу фігури, яка обмежена кривими $\rho=a\,\mathrm{tg}\varphi\sec\varphi$, $\rho=2a\cos\varphi$ та полярної віссю.

Розв'язання.

Знайдемо полярний кут точки B перетину заданих кривих (рис. 31, при $a=5$):

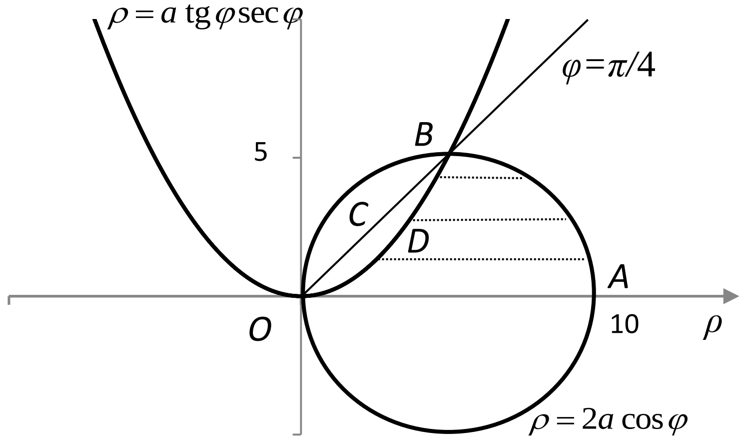


Рис. 31

$$\begin{cases}\rho=a\ \mathrm{tg}\varphi\sec\varphi,\\ \rho=2a\cos\varphi\end{cases}\quad\Rightarrow$$

$$a\ \mathrm{tg}\varphi\sec\varphi=2a\cos\varphi\quad\Rightarrow$$

$$\mathrm{tg}\varphi=2\cos^2\varphi\quad\Rightarrow$$

$$\mathrm{tg}\varphi-\frac{2}{1+\mathrm{tg}^2\varphi}=0\quad\Rightarrow$$

$$\mathrm{tg}^3\varphi+\mathrm{tg}\varphi-2=0\quad\Rightarrow(\mathrm{tg}^3\varphi-1)+(\mathrm{tg}\varphi-1)=0\quad\Rightarrow$$

$$(\mathrm{tg}\varphi-1)(\mathrm{tg}^2\varphi+\mathrm{tg}\varphi+2)=0\quad\Rightarrow\quad\varphi_B=\frac{\pi}{4}.$$

І, оскільки $\varphi_A=0$, то шукану площу знайдемо за формулою

$$S_{OABD}=S_{OABC}-S_{ODBC}.$$

Обчислимо окремо площі S_{OABC} та S_{ODBC}.

$$S_{OABC} = \frac{1}{2}\int_{\alpha}^{\beta} \rho^2(\varphi)\,d\varphi = \frac{1}{2}\int_{0}^{\frac{\pi}{4}} 4a^2\cos^2\varphi\,d\varphi = a^2\int_{0}^{\frac{\pi}{4}}(1+\cos 2\varphi)\,d\varphi =$$

$$= a^2\left(\varphi + \frac{1}{2}\sin 2\varphi\right)\Bigg|_0^{\frac{\pi}{4}} = a^2\left(\frac{\pi}{4}+\frac{1}{2}\right).$$

$$S_{ODBC} = \frac{1}{2}\int_{\alpha}^{\beta} \rho^2(\varphi)\,d\varphi = \frac{1}{2}\int_{0}^{\frac{\pi}{4}} \frac{a^2\,\sin^2\varphi}{\cos^4\varphi}\,d\varphi = \frac{a^2}{2}\int_{0}^{\frac{\pi}{4}}\operatorname{tg}^2\varphi\,\frac{d\varphi}{\cos^2\varphi} =$$

$$= \frac{a^2}{2}\int_{0}^{\frac{\pi}{4}}\operatorname{tg}^2\varphi\,d(\operatorname{tg}\varphi) = \frac{a^2}{2}\cdot\frac{\operatorname{tg}^3\varphi}{3}\Bigg|_0^{\frac{\pi}{4}} = \frac{a^2}{6}.$$

Отже, $S_{OABD} = S_{OABC} - S_{ODBC} = a^2\left(\frac{\pi}{4}+\frac{1}{2}\right) - \frac{a^2}{6} = a^2\left(\frac{\pi}{4}+\frac{1}{3}\right).$

6.486. Знайти площу фігури, обмеженої лінією $\rho = a\sin 5\varphi$ (п'ятіпелюсткова троянда).

Розв'язок. Визначимо, як змінюються межі інтегрування:

$$\sin 5\varphi \ge 0 \;\Rightarrow\; 2\pi k \le 5\varphi \le \pi + 2\pi k$$

$$\Rightarrow\; \frac{2\pi k}{5} \le \varphi \le \frac{\pi}{5} + \frac{2\pi k}{5}, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Отже, точки кривої $\rho = a\sin 5\varphi$ при $0 \le \varphi \le \frac{\pi}{5}$ утворюють перший пелюсток.

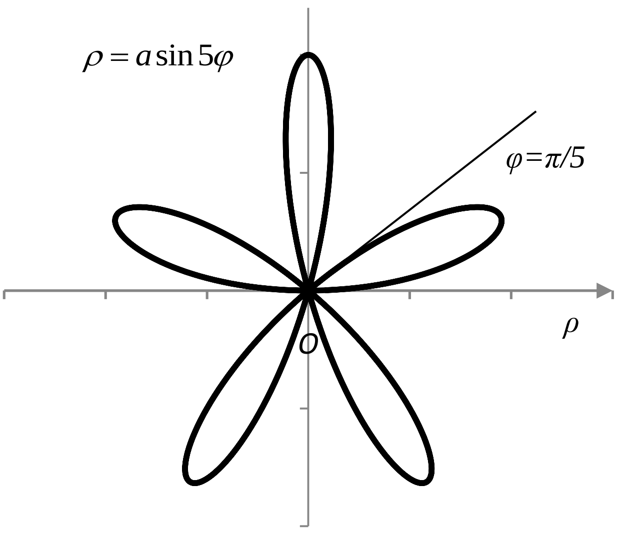


Рис. 32

Користуючись симетрією фігури (див. рис. 32), знайдемо її площу:

$$S = 5\cdot\frac{1}{2}\int_{\alpha}^{\beta}\rho^2(\varphi)\,d\varphi = \frac{5}{2}\int_{0}^{\frac{\pi}{5}} a^2\sin^2 5\varphi\,d\varphi = \frac{5a^2}{4}\int_{0}^{\frac{\pi}{5}}(1-\cos 10\varphi)\,d\varphi = \frac{a^2\pi}{4}.$$

2498. Знайти площу фігури, обмеженої **равликом Паскаля**[5] $\rho = 2a(2+\cos\varphi)$.

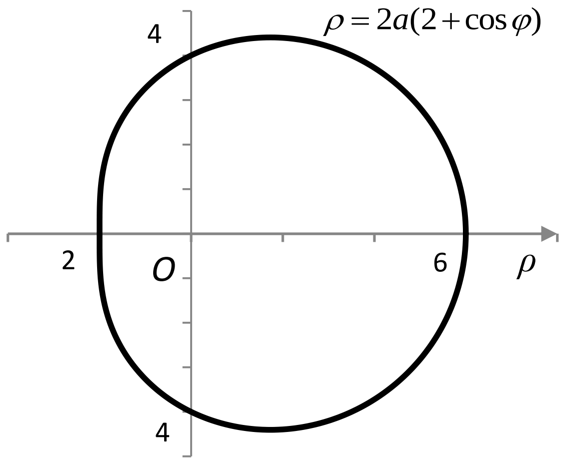


Рис. 33

Розв'язання. Нехай $a>0$. Тоді, користуючись симетрією фігури (рис. 33, при $a=1$), запишемо $S = 2S_1$, де

$$S_1 = \frac{1}{2}\int_{\alpha}^{\beta} \rho^2(\varphi)\, d\varphi =$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^{\pi} 4a^2(2+\cos\varphi)^2\, d\varphi =$$

$$= 2a^2\int_0^{\pi}(4+4\cos\varphi+\cos^2\varphi)\, d\varphi = 2a^2\int_0^{\pi}\left(\frac{9}{2}+4\cos\varphi+\frac{1}{2}\cos 2\varphi\right)d\varphi =$$

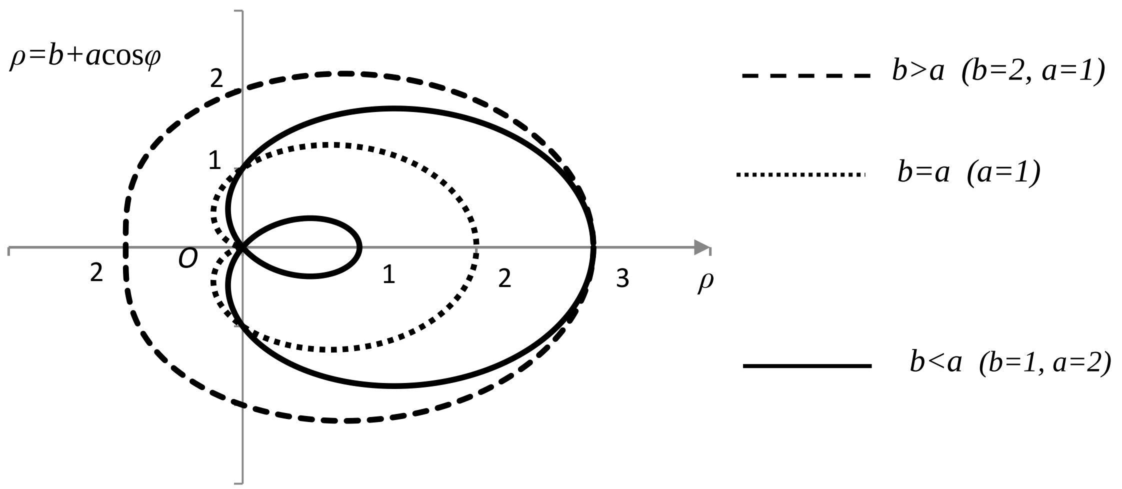
$$= 2a^2\left(\frac{9}{2}\varphi + 4\sin\varphi + \frac{1}{4}\sin 2\varphi\right)\Bigg|_0^{\pi} = 9\pi a^2.$$

Тоді $\qquad S = 2S_1 = 18\pi a^2.$

2498. Знайти площу фігури, обмеженої лінією $\rho = a\,\mathrm{tg}\,\varphi$ $(a>0)$ та прямою $\varphi = \frac{\pi}{4}$.

---

[5] **Равлик Паскаля** – крива 4-го порядку, рівняння якої в прямокутних координатах має вигляд $(x^2+y^2-ax)^2 = b^2(x^2+y^2)$, а в полярних координатах $\rho = b + a\cos\varphi$. Названа за ім'ям Етьєна Паскаля (батька Блеза Паскаля), який вперше розглянув її.



Розв'язання. Шукану площу (рис. 34) знайдемо за формулою

$$S=\frac{1}{2}\int_{\alpha}^{\beta}\rho^2(\varphi)\,d\varphi=$$

$$=\frac{1}{2}\int_{0}^{\frac{\pi}{4}}a^2\operatorname{tg}^2\varphi\,d\varphi=\frac{a^2}{2}\int_{0}^{\frac{\pi}{4}}\frac{1-\cos^2\varphi}{\cos^2\varphi}\,d\varphi=$$

$$=-\frac{a^2}{2}(\operatorname{tg}\varphi-\varphi)\Big|_0^{\frac{\pi}{4}}=\frac{a^2}{8}(4-\pi).$$

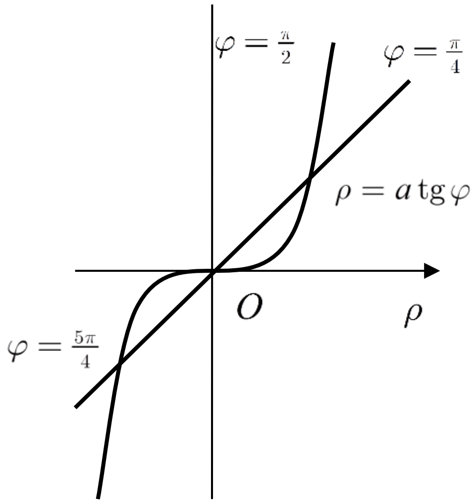


Рис. 34

6.487. Знайти площу фігури, яка розміщена в першій чверті, обмежена кривими $\rho=a\operatorname{tg}\varphi$, $\rho=\dfrac{a}{\cos\varphi}$ $(a>0)$ та полярною віссю.

Розв'язання. Пряма $\varphi=\dfrac{\pi}{2}$ є вертикальною асимптотою графіка функції $\rho=a\operatorname{tg}\varphi$ (див. приклад 7). Знайдемо площу нескінченної фігури $OABCD$, що лежить між лінією $\rho_1=a\operatorname{tg}\varphi$, прямою $\rho_2=\dfrac{a}{\cos\varphi}$ і полярною віссю (рис. 35). Якщо вибрати довільно кут $0\le\varphi\le\dfrac{\pi}{2}$, то площу фігури $OABCD$ (рис. 35) можна знайти як різницю площі ΔOAB та площі криволінійної фігури ODC:

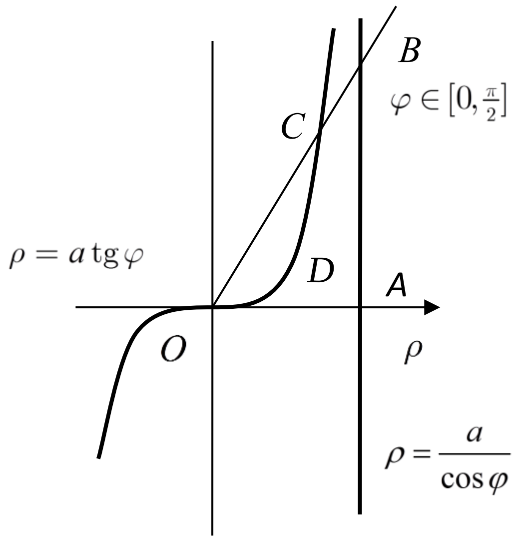


Рис. 35

$$S=S_{\Delta ABC}-S_{ODC}=$$

$$=\frac{1}{2}\int_{\alpha}^{\beta}(\rho_2{}^2(\varphi)-\rho_1{}^2(\varphi))\,d\varphi=\frac{1}{2}\underbrace{\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}\left(\frac{a^2}{\cos^2\varphi}-a^2\operatorname{tg}^2\varphi\right)d\varphi}_{\text{Невласний інтеграл 2-го роду}}=$$

$$=\frac{a^2}{2}\lim_{\varepsilon\to 0}\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}-\varepsilon}\left(\frac{1}{\cos^2\varphi}-\frac{1-\cos^2\varphi}{\cos^2\varphi}\right)d\varphi=\frac{a^2}{2}\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}d\varphi=\frac{a^2\pi}{4}.$$

6.488. Знайти площу фігури, обмеженої двома послідовними витками **логарифмічної спіралі**[6] $\rho=\mathrm{e}^{\varphi}$, починаючи з $\varphi=0$.

Розв'язання. За умовою задачі треба знайти площу фігури обмеженої двома послідовними витками логарифмічної спіралі $\rho=\mathrm{e}^{\varphi}$ (рис. 36), починаючи з $\rho=\mathrm{e}^{\varphi}$.

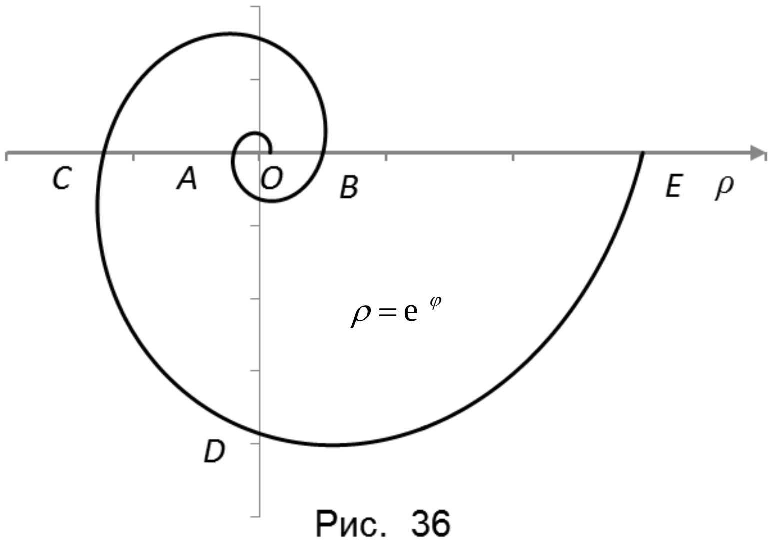


Рис. 36

Шукану площу знайдемо як різницю площ фігур $OBCDE$ та OAB. Тобто

$$S=S_{OBCDE}-S_{OAB}=\frac{1}{2}\int\limits_{\alpha_2}^{\beta_2}\rho^2(\varphi)\,d\varphi-\frac{1}{2}\int\limits_{\alpha_1}^{\beta_1}\rho^2(\varphi)\,d\varphi=\frac{1}{2}\int\limits_{2\pi}^{4\pi}\mathrm{e}^{2\varphi}\,d\varphi-\frac{1}{2}\int\limits_{0}^{2\pi}\mathrm{e}^{2\varphi}\,d\varphi=$$

$$=\frac{1}{4}\mathrm{e}^{2\varphi}\Big|_{2\pi}^{4\pi}-\frac{1}{4}\mathrm{e}^{2\varphi}\Big|_{0}^{2\pi}=\frac{1}{4}(\mathrm{e}^{8\pi}-2\mathrm{e}^{4\pi}+1)=\frac{1}{4}(\mathrm{e}^{4\pi}-1)^2.$$

6.489. Знайти площу, обмежену кривими $\rho^2=2\cos 2\varphi$, $\rho=1 \quad (\rho\ge 1)$.

---

[6] **Логарифмічна спіраль** $\rho=a\,\mathrm{e}^{m\varphi}$ або **ізогональна спіраль** — особливий вид спіралі розмір витків якої поступово збільшується, але форма залишається незмінною. Можливо, внаслідок цієї властивості, логарифмічна спіраль з'являється в багатьох зростаючих формах, подібних до мушель молюсків і квіток соняшників.

Логарифмічна спіраль вперше була описана Декартом і пізніше досліджена Бернуллі, який називав її Spira mirabilis — «дивовижна спіраль». Термін «логарифмічна спіраль» (фр. spirale logarithmique) першим вжив П'єр Варіньон.

Якоб Бернуллі заповів, щоб на його могилі було викарбувана логарифмічна спіраль, але на його надгробку помилково зобразили спіраль Архімеда. Проте напис, вигравіруваний навколо спіралі згідно з заповітом (лат. EADEM MUTATA RESURGO — «змінена, я знов воскресаю»), свідчить, що мається на увазі саме логарифмічна спіраль, яка має властивість зберігати свою форму після різноманітних перетворень.

Розв'язання. Знайдемо полярні кути точок, в яких перетинаються лемніската Бернуллі $\rho_2^{\,2} = 2\cos 2\varphi$ та коло $\rho_1 = 1.$

$$\begin{cases} \rho^2 = 2\cos 2\varphi, \\ \rho = 1 \end{cases} \Rightarrow \quad 2\cos 2\varphi = 1 \quad \Rightarrow$$

$$\varphi = \pm\frac{\pi}{6} + \pi k, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

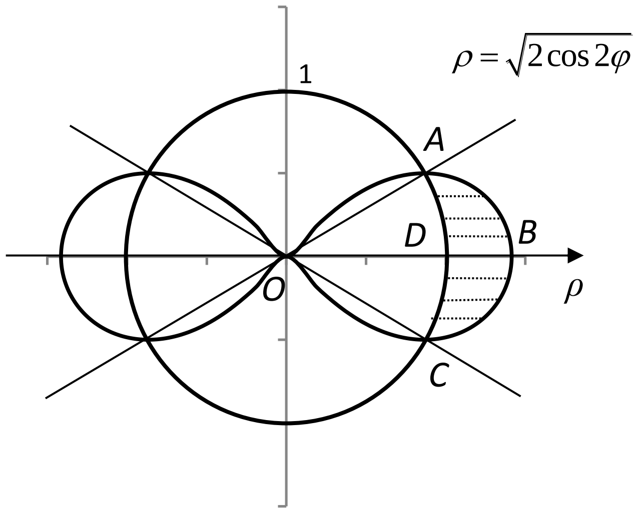


Рис. 37

Користуючись симетрією фігури (рис. 37), шукану площу знайдемо за формулою $S = 2S_{ABCD}$, де $S_{ABCD} = S_{OABC} - S_{OADC}$.

Обчислимо окремо площі S_{AOBC} та S_{OADC}.

$$S_{AOBC} = \frac{1}{2}\int_{\alpha}^{\beta} \rho_2^{\,2}(\varphi)\, d\varphi = 2\cdot\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{6}} 2\cos 2\varphi\, d\varphi = \sin 2\varphi\Big|_0^{\frac{\pi}{6}} = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

$$S_{OADC} = \frac{1}{2}\int_{\alpha}^{\beta} \rho_1^{\,2}(\varphi)\, d\varphi = 2\cdot\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{6}} d\varphi = \frac{\pi}{6}.$$

Тоді $$S_{ABCD} = S_{OABC} - S_{OADC} = \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\pi}{6}$$

та шукана площа фігури $$S = 2S_{ABCD} = \sqrt{3} - \frac{\pi}{3}.$$

6.490. Знайти площу фігури, обмеженої лінією $\rho = a\cos 3\varphi$ (трипелюсткова троянда).

Розв'язання. Визначимо, як змінюються межі інтегрування:

$$\cos 3\varphi \ge 0 \quad \Rightarrow \quad 2\pi k - \frac{\pi}{2} \le 3\varphi \le \frac{\pi}{2} + 2\pi k \quad \Rightarrow \quad \frac{2\pi k}{3} - \frac{\pi}{6} \le \varphi \le \frac{\pi}{6} + \frac{2\pi k}{3}, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Отже, точки кривої $\rho = a\cos 3\varphi$ при $-\frac{\pi}{6} \le \varphi \le \frac{\pi}{6}$ утворюють перший пелюсток. Користуючись симетрією фігури (див. рис. 38), знайдемо її площу:

$$S = 6 \cdot \frac{1}{2}\int_{\alpha}^{\beta} \rho^2(\varphi)\, d\varphi =$$

$$= 3\int_0^{\frac{\pi}{6}} a^2 \cos^2 3\varphi \, d\varphi = \frac{3a^2}{2}\int_0^{\frac{\pi}{6}} (1+\cos 6\varphi)\, d\varphi =$$

$$= \frac{3a^2}{2}\left(\varphi + \frac{1}{6}\sin 6\varphi\right)\Bigg|_0^{\frac{\pi}{6}} = \frac{a^2\pi}{4}.$$

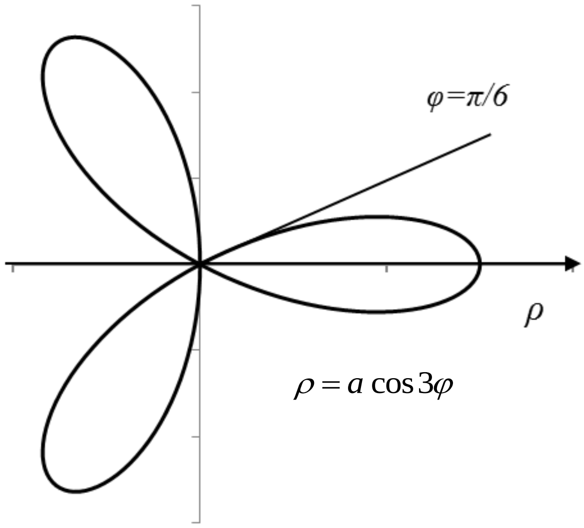


Рис. 38

6.492. Знайти площу фігури, обмеженої колом $\rho = \sqrt{3}\sin\varphi$ та кардіоїдою $\rho = 1-\cos\varphi$ (зовні кардіоїди).

Розв'язання. Знайдемо полярні кути точок перетину кардіоїди $\rho_1 = 1-\cos\varphi$ та кола $\rho_2 = \sqrt{3}\sin\varphi$.

$$\begin{cases}\rho = \sqrt{3}\sin\varphi, \\ \rho = 1-\cos\varphi\end{cases} \Rightarrow$$

$$\sqrt{3}\sin\varphi + \cos\varphi - 1 = 0 \quad \Rightarrow$$

$$\frac{2\sqrt{3}\,\mathrm{tg}\,\frac{\varphi}{2} + 1 - \mathrm{tg}^2\,\frac{\varphi}{2}}{1+\mathrm{tg}^2\,\frac{\varphi}{2}} - 1 = 0 \quad \Rightarrow$$

$$2\sqrt{3}\,\mathrm{tg}\,\frac{\varphi}{2} - 2\,\mathrm{tg}^2\,\frac{\varphi}{2} = 0 \quad \Rightarrow$$

$$\mathrm{tg}\,\frac{\varphi}{2}(\sqrt{3} - \mathrm{tg}\,\frac{\varphi}{2}) = 0 \quad \Rightarrow$$

$$\varphi_1 = 0, \quad \varphi_2 = \frac{2\pi}{3}.$$

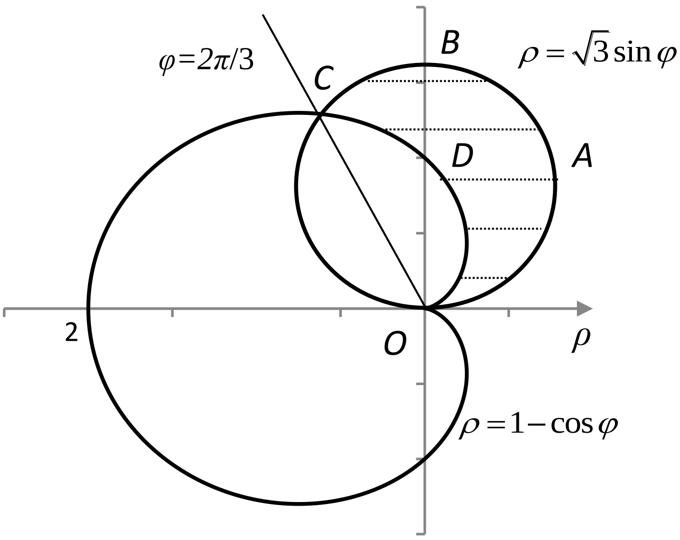


Рис. 39

Площу, яка обмежена колом та розташована зовні кардіоїди будемо шукати за формулою $S_{OABCD} = S_{OABC} - S_{ODC}$.

$$S_{AOBCD} = \frac{1}{2}\int_{\alpha}^{\beta} (\rho_2^2(\varphi) - \rho_1^2(\varphi))\, d\varphi = \frac{1}{2}\int_0^{\frac{2\pi}{3}} (3\sin^2\varphi - (1-\cos\varphi)^2)\, d\varphi =$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^{\frac{2\pi}{3}}\left(\frac{3}{2}-\frac{3}{2}\cos 2\varphi - 1 + 2\cos\varphi - \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos 2\varphi\right) d\varphi =$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^{\frac{2\pi}{3}}(2\cos\varphi - 2\cos 2\varphi)\, d\varphi = \left(\sin\varphi - \frac{1}{2}\sin 2\varphi\right)\Big|_0^{\frac{2\pi}{3}} = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\sqrt{3}}{4} = \frac{3\sqrt{3}}{4}.$$

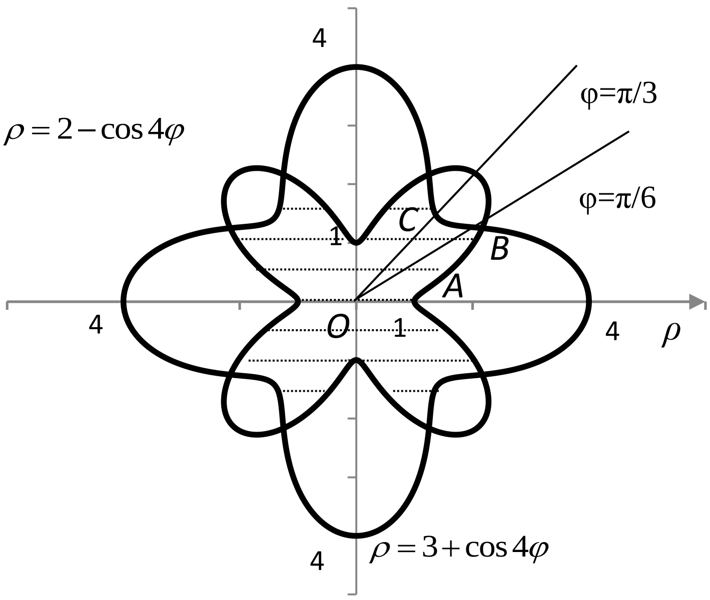
2500. Знайти площу спільної частини фігур, обмежених лініями $\rho = 3 + \cos 4\varphi$ (рис. 23) та $\rho = 2 - \cos 4\varphi$ (рис. 24).

Розв'язання. Беручи до уваги симетрію фігури (рис. 40), можна записати $S = 8S_{ABCO}$, де

$$S_{ABCO} = S_{OAB} + S_{OBC}.$$

Знайдемо $\angle BOA$. Оскільки B -– це точка перетину кривих $\rho = 3 + \cos 4\varphi$ та $\rho = 2 - \cos 4\varphi$, то шуканий $\angle BOA$ знайдемо з рівняння

$$3 + \cos 4\varphi = 2 - \cos 4\varphi$$



або $\cos 4\varphi = -\frac{1}{2}$. Звідки

Рис. 40

знайдемо $\varphi = \pm\frac{\pi}{6} + \frac{k\pi}{2},\ k \in \mathbb{Z}$. Тобто $\angle BOA = \frac{\pi}{6}$. Тоді

$$S_{OAB} = \frac{1}{2}\int_\alpha^\beta \rho^2(\varphi)d\varphi = \frac{1}{2}\int_o^{\frac{\pi}{6}}(2-\cos 4\varphi)^2 d\varphi = \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{6}}(4 - 4\cos 4\varphi + \cos^2 4\varphi)\, d\varphi =$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{6}}(4{,}5 - 4\cos 4\varphi + \frac{1}{2}\cos 8\varphi)\, d\varphi = \frac{1}{2}\left(4{,}5\varphi - \sin 4\varphi + \frac{1}{16}\sin 8\varphi\right)\Big|_0^{\frac{\pi}{6}} = \frac{3}{8}\pi - \frac{17}{64}\sqrt{3}.$$

$$S_{OBC} = \frac{1}{2}\int_\alpha^\beta \rho^2(\varphi)d\varphi = \frac{1}{2}\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}}(3+\cos 4\varphi)^2 d\varphi = \frac{1}{2}\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}}(9 + 6\cos 4\varphi + \cos^2 4\varphi)d\varphi =$$

$$=\frac{1}{2}\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}}(9{,}5+6\cos 4\varphi+\frac{1}{2}\cos 8\varphi)d\varphi=\frac{19\pi}{48}-\frac{23\sqrt{3}}{64}.$$

Звідки знаходимо

$$S_{OABC}=S_{OAB}+S_{OBC}=\frac{3}{8}\pi-\frac{17}{64}\sqrt{3}+\frac{19}{48}\pi-\frac{23}{64}\sqrt{3}=\frac{37}{64}-\frac{5}{8}\sqrt{3}.$$

Тоді $$S=8S_{OABC}=\frac{37}{8}\pi-5\sqrt{3}\ .$$

2501. Фігура на площині обмежена лінією $\rho=2+\cos 2\varphi$ (див. рис. 25). Знайти площу частини даної фігури, розташованої поза лінією $\rho=2+\sin\varphi$ (див. рис. 26).

Розв’язання. Користуючись симетрією даної фігури, можна записати $S=2S_{ABDC}$ (рис. 41).

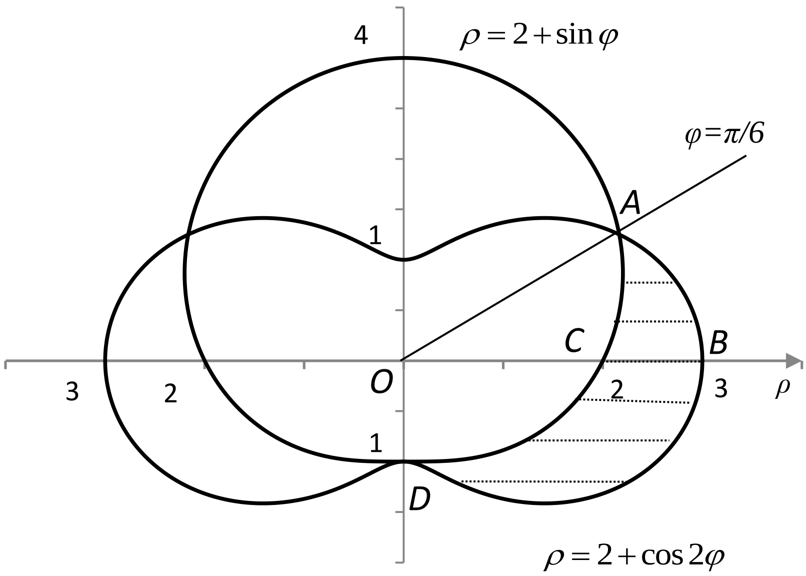


Рис. 41

Знайдемо полярні кути φ_A та φ_D точок A і D відповідно, в яких перетинаються криві $\rho_2=2+\cos 2\varphi$ та $\rho_1=2+\sin\varphi$. Очевидно, ці кути задовольняють рівнянню $2+\cos 2\varphi=2+\sin\varphi$, або $1-2\sin^2\varphi=\sin\varphi$. Звідси знаходимо: $\sin\varphi=-1$ та $\sin\varphi=\frac{1}{2}$, тобто $\varphi_D=\frac{3}{2}\pi$, $\varphi_A=\frac{\pi}{6}$. Тоді шукану площу будемо обчислювати за формулою $S_{ABDC}=S_{OABD}-S_{OACD}$, де

$$S_{OABD}=\frac{1}{2}\int_{\alpha}^{\beta}\rho_2^{\,2}(\varphi)d\varphi=\frac{1}{2}\int_{\frac{3\pi}{2}}^{\frac{\pi}{6}}(2+\cos 2\varphi)^2d\varphi,$$

$$S_{OACD}=\frac{1}{2}\int_{\alpha}^{\beta}\rho_1^2(\varphi)d\varphi=\frac{1}{2}\int_{\frac{3\pi}{2}}^{\frac{\pi}{6}}(2+\sin\varphi)^2d\varphi,$$

$$S=2S_{ABDC}=2(S_{OABD}-S_{OACD})=\int_{\frac{3\pi}{2}}^{\frac{\pi}{6}}(2+\cos 2\varphi)^2d\varphi-\int_{\frac{3\pi}{2}}^{\frac{\pi}{6}}(2+\sin\varphi)^2d\varphi=$$

$$=\int_{\frac{3\pi}{2}}^{\frac{\pi}{6}}\left(4\cos 2\varphi+\frac{1}{2}\cos 4\varphi-4\sin\varphi+\frac{1}{2}\cos 2\varphi\right)d\varphi=$$

$$=\left(2\sin 2\varphi+\frac{1}{8}\sin 4\varphi+4\cos\varphi+\frac{1}{4}\sin 2\varphi\right)\Bigg|_{\frac{3\pi}{2}}^{\frac{\pi}{6}}=\sqrt{3}+\frac{\sqrt{3}}{16}+2\sqrt{3}+\frac{\sqrt{3}}{8}=\frac{51\sqrt{3}}{16}.$$

2502. Знайти площу фігури, обмеженої лінією $\rho^2=a^2\cos n\,\varphi$ $(n\in N)$.

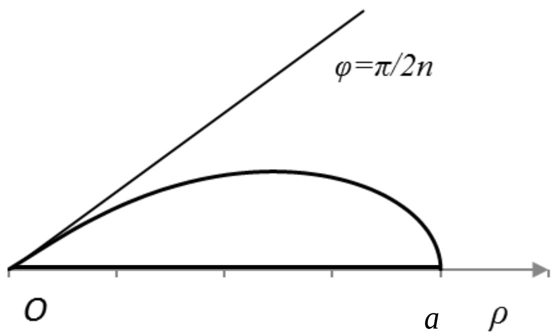


Рис. 42

Р**озв'язання.** Оскільки $\cos n\,\varphi\geq 0$, то неважко підрахувати, що лінія, задана рівнянням $\rho^2=a^2\cos n\,\varphi$, буде мати n пелюстків, або $2n$ половинок цих пелюстків (рис. 42).

Тому шукану площу знайдемо за формулою:

$$S=2n\cdot\frac{1}{2}\int_{\alpha}^{\beta}\rho^2(\varphi)\,d\varphi=2n\cdot\frac{1}{2}\int_{0}^{\frac{\pi}{2n}}a^2\cos n\,\varphi\,d\varphi=a^2\sin n\,\varphi\Big|_0^{\frac{\pi}{2n}}=a^2.$$

2503. Довести, що площа фігури, обмеженої будь-якими двома полярними радіусами **гіперболічної спіралі**[7] $\rho\,\varphi=a$ та її дугою, пропорційна різниці цих радіусів.

---

[7] **Гіперболічна спіраль** — плоска трансцендентна крива. Рівняння гіперболічної спіралі $\rho\varphi=a$ в полярній системі координат є зворотнім для рівняння **спіралі Архімеда** $\rho=a\varphi$.

Розв'язання. Побудуємо гіперболічну спіраль $\rho = \dfrac{a}{\varphi}$ при $a > 0$ (рис. 43). Виберемо дві довільні точки $A(\rho_1;\varphi_1)$ та $B(\rho_2;\varphi_2)$, що належать гіперболічної спіралі та знайдемо площу криволінійного сектора AOB

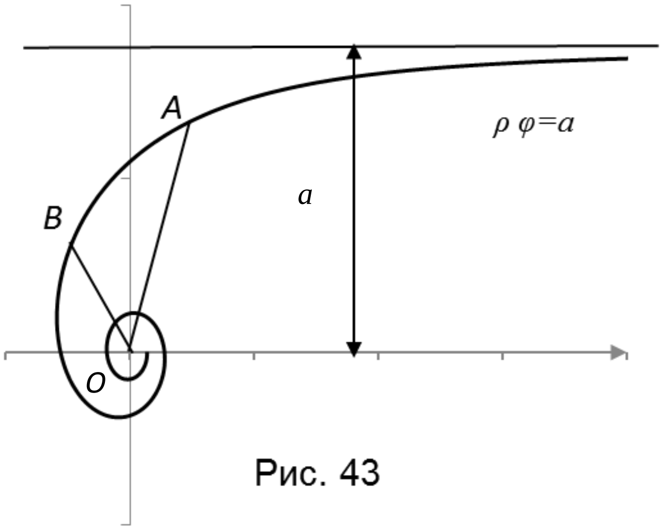


Рис. 43

$$S_{AOB} = \frac{1}{2}\int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \rho^2(\varphi)d\varphi = \frac{1}{2}\int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \frac{a^2}{\varphi^2}\,d\varphi =$$

$$= -\frac{a^2}{2\varphi}\bigg|_{\varphi_1}^{\varphi_2} = \frac{a^2}{2}\left(\frac{1}{\varphi_1} - \frac{1}{\varphi_2}\right) = \frac{a}{2}(\rho_1 - \rho_2).$$

Бачимо, що шукана площа дійсно пропорційна різниці полярних радіусів, що обмежують даний криволінійний сектор.

2504. Довести, що площа фігури, обмеженої будь-якими полярними радіусами логарифмічної спіралі $\rho = a\,\mathrm{e}^{m\varphi}$ та її дугою, пропорційна різниці квадратів цих радіусів.

Розв'язання. Побудуємо логарифмічну спіраль $\rho = a\,\mathrm{e}^{m\varphi}$ при $a > 0$

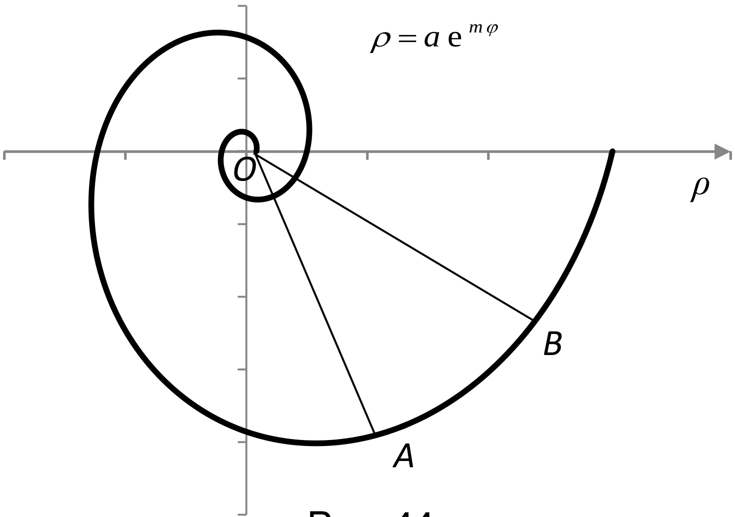


Рис. 44

(рис. 44) та виберемо дві довільні точки $A(\rho_1;\varphi_1)$ та $B(\rho_2;\varphi_2)$.

Знайдемо площу криволінійного сектора AOB

$$S_{AOB} = \frac{1}{2}\int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \rho^2(\varphi)d\varphi = \frac{1}{2}\int_{\varphi_1}^{\varphi_2} a^2\,\mathrm{e}^{2m\varphi}d\varphi = \frac{a^2}{4m}\mathrm{e}^{2m\varphi}\bigg|_{\varphi_1}^{\varphi_2} = \frac{a^2}{4m}(\mathrm{e}^{2m\varphi_2} - \mathrm{e}^{2m\varphi_1}) =$$

$$= \frac{a}{4m}((a\,\mathrm{e}^{m\varphi_2})^2 - (a\,\mathrm{e}^{m\varphi_1})^2) = \frac{a}{4m}(\rho_2^2 - \rho_1^2).$$

Бачимо, що шукана площа дійсно пропорційна різниці квадратів полярних радіусів, що обмежують даний криволінійний сектор.

2505. Знайти площу фігури, що міститься між зовнішньою та внутрішньою частинами лінії $\rho = a\sin^3\frac{\varphi}{3}$.

Розв'язання. Для побудови кривої скористаємося графіком

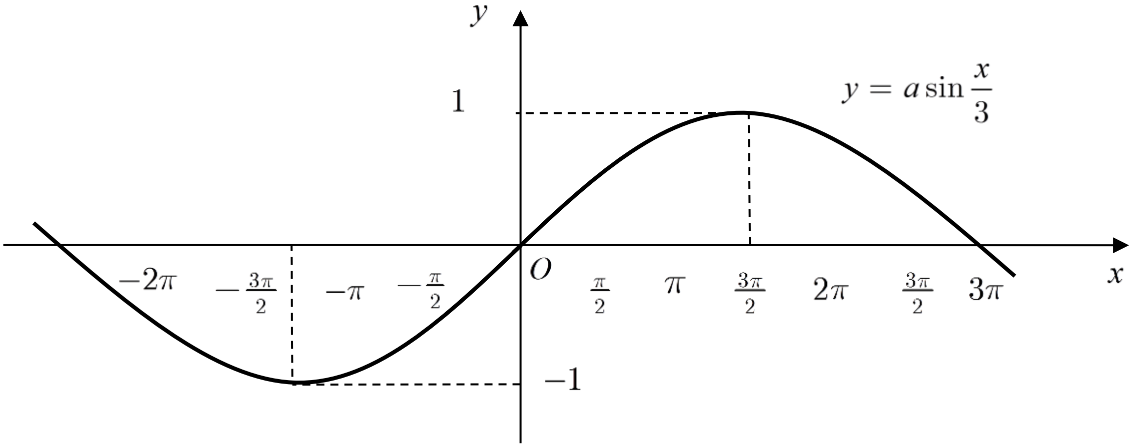


Рис. 45

функції $y = a\sin\frac{x}{3}$ (рис. 45), за допомогою якого неважко дослідити на монотонність функцію $\rho = a\sin^3\frac{\varphi}{3}$ та побудувати її графік (рис. 46).

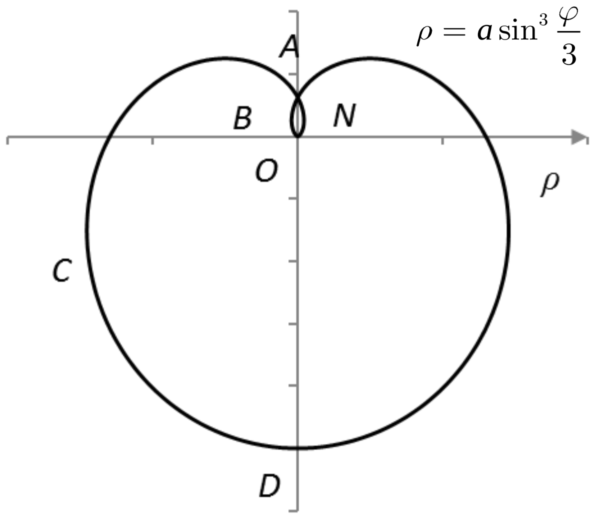


Рис. 46

Для знаходження шуканої площі S скористаємось симетрією фігури $S = 2S_{ODCAB}$. Далі, $S_{ODCAB} = S_{ADC} - S_{AOB}$, де $S_{AOB} = S_{ANO}$.

Знайдемо кожну площу окремо

$$S_{AOB}=\frac{1}{2}\int\limits_{\alpha}^{\beta}\rho^2(\varphi)\,d\varphi=\frac{1}{2}\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{2}}a^2\sin^6\frac{\varphi}{3}\,d\varphi=\left|\begin{array}{ll} t=\dfrac{\varphi}{3}, & \begin{array}{|c|c|c|}\hline \varphi & 0 & \frac{\pi}{2}\\ \hline t & 0 & \frac{\pi}{6}\\ \hline\end{array}\\ d\varphi=3dt & \end{array}\right|=$$

$$=\underbrace{\frac{3a^2}{2}\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{6}}\sin^6 t\;dt}_{I_1}=\frac{3}{2}a^2\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{6}}\frac{1}{2^3}(1-\cos 2t)^3\;dt=$$

$$=\frac{3}{16}a^2\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{6}}(1-3\cos 2t+3\cos^2 2t+\cos^3 2t)\;dt=\frac{3}{16}a^2\left(t-\frac{3}{2}\sin 2t\right)\Bigg|_0^{\frac{\pi}{6}}+$$

$$+\frac{9}{32}a^2\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{6}}(1+\cos 4t)\;dt-\frac{3}{32}a^2\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{6}}(1-\sin^2 2t)\;d(\sin 2t)=\frac{3a^2}{16}\left(\frac{\pi}{6}-\frac{3\sqrt{3}}{4}\right)+$$

$$+\frac{9a^2}{32}\left(\frac{\pi}{6}-\frac{\sqrt{3}}{8}\right)-\frac{3a^2}{32}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{3\sqrt{3}}{42}\right)=\frac{(5\pi-9\sqrt{3})a^2}{64}.$$

$$S_{ADC}=\frac{1}{2}\int\limits_{\alpha}^{\beta}\rho^2(\varphi)\,d\varphi=\frac{1}{2}\int\limits_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}}a^2\sin^6\frac{\varphi}{3}\,d\varphi=\left|\begin{array}{ll} t=\dfrac{\varphi}{3}, & \begin{array}{|c|c|c|}\hline \varphi & \frac{\pi}{2} & \frac{3\pi}{2}\\ \hline t & \frac{\pi}{6} & \frac{\pi}{2}\\ \hline\end{array}\\ d\varphi=3dt & \end{array}\right|=$$

$$=\frac{3}{2}a^2\int\limits_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}}\sin^6 t\;dt=\underbrace{\frac{3a^2}{2}\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{2}}\sin^6 t\;dt}_{I_2\quad(k=3)}-\underbrace{\frac{3a^2}{2}\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{6}}\sin^6 t\;dt}_{I_1}=$$

$$=\left|\;I_2=\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{2}}\sin^{2k}t\;dt=\frac{(2k-1)!!}{(2k!!)}\cdot\frac{\pi}{2}\;\right|=\frac{3a^2}{2}\cdot\frac{5!!}{6!!}\cdot\frac{\pi}{2}-\frac{(5\pi-9\sqrt{3})a^2}{64}=$$

$$=\frac{15\pi a^2}{64}-\frac{5\pi a^2}{64}+\frac{9\sqrt{3}a^2}{64}=\frac{a^2}{64}(10\pi+9\sqrt{3}).$$

$$S_{ODCAB}=S_{ADC}-S_{AOB}=\frac{a^2}{64}(10\pi+9\sqrt{3})-\frac{a^2}{64}(5\pi-9\sqrt{3})=\frac{a^2}{64}(5\pi+18\sqrt{3}).$$

Звідси знайдемо шукану площу

$$S = 2S_{ODCAB} = \frac{a^2}{32}(5\pi + 18\sqrt{3}).$$

2506. Обчислити площу фігури, обмеженої лінією $\rho = \sqrt{1-t^2}$, $\varphi = \arcsin t + \sqrt{1-t^2}$.

Розв'язання. Знайдемо проміжок зміни параметра t з умови $1-t^2 \geq 0$. Дістанемо $t \in [-1; 1]$, тоді $\varphi \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$, а шукану площу знайдемо за формулою

$$S = \frac{1}{2}\int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \rho^2(\varphi)\, d\varphi = \left| \begin{array}{c} \rho^2(\varphi) = 1-t^2, \\ d\varphi = \left(\dfrac{1}{\sqrt{1-t^2}} - \dfrac{t}{\sqrt{1-t^2}} \right) dt \end{array} \right| = \frac{1}{2}\int_{-1}^{1} (1-t^2)\frac{1-t}{\sqrt{1-t^2}}\, dt =$$

$$= \frac{1}{2}\int_{-1}^{1} \sqrt{1-t^2}\, dt - \frac{1}{2}\int_{-1}^{1} t\sqrt{1-t^2}\, dt = I_1 + I_2.$$

Оскільки функція $t\sqrt{1-t^2}$ непарна на проміжку $[-1;1]$, то останній інтеграл $I_2 = 0$. Тоді

$$S = I_1 = \frac{1}{2}\int_{-1}^{1} \sqrt{1-t^2}\, dt = \left| \begin{array}{ll} t = \sin u, & \begin{array}{|c|c|c|} \hline t & 1 & -1 \\ \hline u & -\frac{\pi}{2} & \frac{\pi}{2} \\ \hline \end{array} \\ dt = \cos u\, du & \end{array} \right| = \frac{1}{2}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \underbrace{\cos^2 u}_{\text{парна}}\, du =$$

$$= \frac{1}{2}\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} (1 + \cos 2u)\, du = \frac{\pi}{4} + \frac{1}{4}\sin 2u \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{4}.$$

2507. Знайти площу фігури, обмеженої **лемніскатою Бернуллі** $(x^2 + y^2)^2 = a^2(x^2 - y^2), \quad a > 0$.

Розв'язання. Рівняння лемніскати Бернуллі (див. рис. 20) в полярній системі координат прийме вигляд $\rho^2 = a^2 \cos 2\varphi \quad \Rightarrow$ $\rho = a\sqrt{\cos 2\varphi}$. Знайдемо, як змінюється кут:

$$cos 2\varphi \geq 0 \quad \Rightarrow \quad 2\pi k - \frac{\pi}{2} \leq 2\varphi \leq \frac{\pi}{2} + 2\pi k \quad \Rightarrow \quad \pi k - \frac{\pi}{4} \leq \varphi \leq \frac{\pi}{4} + \pi k, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Користуючись симетрією лемніскати, знайдемо шукану площу $S = 4S_1$, де S_1 – площа фігури, що міститься в куті $0 \le \varphi \le \dfrac{\pi}{4}$, за формулою

$$S = 4S_1 = 4 \cdot \frac{1}{2}\int_{\alpha}^{\beta} \rho^2(\varphi)\, d\varphi = 2\int_{0}^{\frac{\pi}{4}} a^2 \cos 2\varphi\, d\varphi = a^2 \sin 2\varphi \Big|_0^{\frac{\pi}{4}} = a^2.$$

6.491. Знайти площу фігури, обмеженої лемніскатою Бернуллі $\rho^2 = a^2 \sin 2\varphi$.

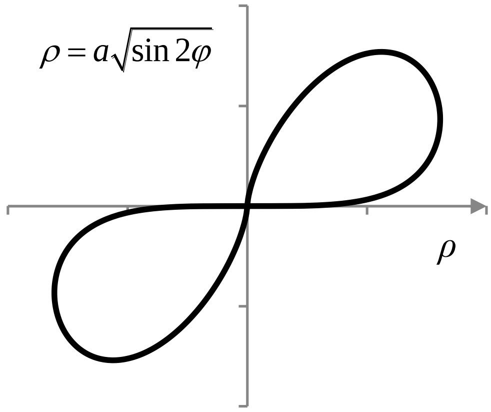


Рис. 47

Розв'язання. Знайдемо, як змінюється кут:

$$\sin 2\varphi \ge 0 \quad \Rightarrow \quad 2\pi k \le 2\varphi \le \pi + 2\pi k$$

$$\Rightarrow \quad \pi k \le \varphi \le \frac{\pi}{2} + \pi k, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Користуючись симетрією лемніскати (рис. 47, при $a = 1$), знайдемо шукану площу за формулою

$$S = 2 \cdot \frac{1}{2}\int_{\alpha}^{\beta} \rho^2(\varphi)\, d\varphi = \int_{0}^{\frac{\pi}{2}} a^2 \sin 2\varphi\, d\varphi = -\frac{a^2}{2}\cos 2\varphi \Bigg|_0^{\frac{\pi}{2}} = a^2.$$

2508. Знайти площу тієї частини фігури, обмеженої лемніскатою Бернуллі $(x^2 + y^2)^2 = a^2(x^2 - y^2)$, що лежить на полі круга $x^2 + y^2 = \dfrac{a^2}{2}$.

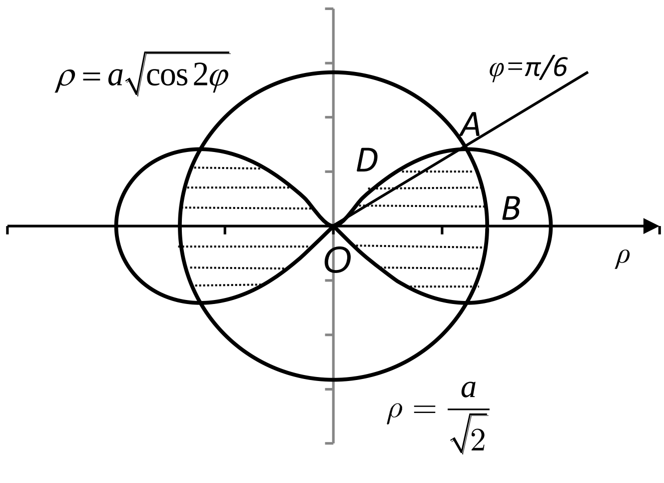


Рис. 48

Розв'язання. Рівняння лемніскати Бернуллі $(x^2 + y^2)^2 = a^2(x^2 - y^2)$ та кола $x^2 + y^2 = \dfrac{a^2}{2}$ в полярній системі координат приймуть вигляд

$\rho_1 = a\sqrt{\cos 2\varphi}$ та $\rho_2 = \dfrac{a}{\sqrt{2}}$. Користуючись симетрією фігури (рис. 48), шукану площу знайдемо за формулою $S = 4S_{ABOD}$, де $S_{ABOD} = S_{AOB} + S_{OAD}$.

Знайдемо кут AOB: $\begin{cases} \rho^2 = \dfrac{a^2}{2}, \\ \rho^2 = a^2\cos 2\varphi \end{cases} \Rightarrow \quad \dfrac{a^2}{2} = a^2\cos 2\varphi \quad \Rightarrow$

$$\cos 2\varphi = \frac{1}{2} \quad \Rightarrow \quad \varphi = \pm\frac{\pi}{6} + \pi k, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Отже, $\angle AOB = \dfrac{\pi}{6}$. Обчислимо окремо площі S_{AOB} та S_{OAD}.

$$S_{AOB} = \frac{1}{2}\int_{\alpha}^{\beta} \rho_2^{\,2}(\varphi)\, d\varphi = \frac{1}{2}\int_{0}^{\frac{\pi}{6}} \frac{a^2}{2}\, d\varphi = \frac{a^2\pi}{24}.$$

$$S_{OAD} = \frac{1}{2}\int_{\alpha}^{\beta} \rho_1^{\,2}(\varphi)\, d\varphi = \frac{1}{2}\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} a^2\cos 2\varphi\, d\varphi = \frac{a^2}{4}\sin 2\varphi\Big|_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} = \frac{a^2}{4}\left(1 - \frac{\sqrt{3}}{2}\right).$$

Тоді $$S_{ABOD} = S_{AOB} + S_{OAD} = \frac{a^2\pi}{24} + \frac{a^2}{4}\left(1 - \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$

та шукана площа фігури $S = 4S_{ABOD} = a^2\left(\dfrac{\pi}{6} + 1 - \dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)$.

2509. Знайти площу фігури, обмеженої лінією $(x^2 + y^2)^2 - a^2x^2 - b^2y^2 = 0$.

Розв'язання. В полярних координатах (1) рівняння лінії, що обмежує фігуру прийме вигляд:

$$\rho^4(\cos^2\varphi + \sin^2\varphi)^2 = a^2\rho^2\cos^2\varphi + b^2\rho^2\sin^2\varphi \quad \Rightarrow \quad \rho^2 = a^2\cos^2\varphi + b^2\sin^2\varphi.$$

Крива $\rho^2 = a^2\cos^2\varphi + b^2\sin^2\varphi$ є замкненою та симетричною відносно полярної осі, бо є парною відносно φ та симетрична відносно полюса, бо $\forall\ \varphi,\quad \rho(\varphi+\pi)=\rho(\varphi)$, оскільки

$$a^2\cos^2(\varphi+\pi)+b^2\sin^2(\varphi+\pi)=$$

$$=a^2\cos^2\varphi+b^2\sin^2\varphi.$$

Крім того, ця крива перетинає полярну вісь у точках $\pm a$. Враховуючи симетрію фігури (рис. 49, при $a=2,\ b=3$) знайдемо шукану площу за формулою

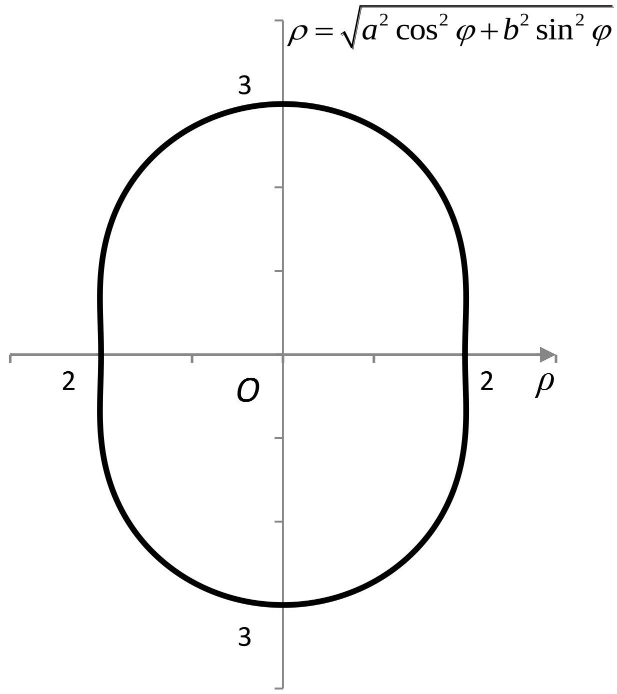


Рис. 49

$$S=4\cdot\frac{1}{2}\int\limits_{\alpha}^{\beta}\rho^2(\varphi)\,d\varphi=$$

$$=2\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{2}}(a^2\cos^2\varphi+b^2\sin^2\varphi)\,d\varphi=$$

$$=\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{2}}(a^2(1+\cos 2\varphi)+b^2(1-\cos 2\varphi))\,d\varphi=$$

$$=\left(a^2\left(\varphi-\frac{1}{2}\sin 2\varphi\right)+b^2\left(\varphi+\frac{1}{2}\sin 2\varphi\right)\right)\Bigg|_0^{\frac{\pi}{2}}=\frac{\pi}{2}(a^2+b^2).$$

2510. Знайти площу фігури, обмеженої лінією $(x^2+y^2)^3=4a^2x\,y\,(x^2-y^2)$.

Розв'язання. В полярних координатах (1) рівняння кривої $(x^2+y^2)^3=4a^2x\,y\,(x^2-y^2)$ прийме такий вигляд:

$$\rho^6(\cos^2\varphi+\sin^2\varphi)^3=$$

$$=4a^2\rho^4\cos\varphi\sin\varphi(\cos^2\varphi-\sin^2\varphi)$$

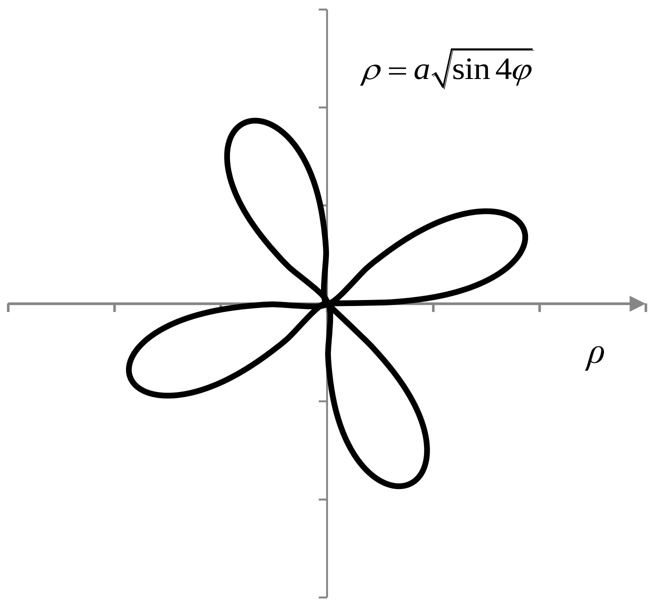


Рис. 50

$$\Rightarrow \quad \rho^2 = 2a^2 \sin 2\varphi \cos 2\varphi \quad \Rightarrow \qquad \rho^2 = a^2 \sin 4\varphi \quad \Rightarrow \quad \rho = a\sqrt{\sin 4\varphi}\,.$$

Знайдемо, як змінюється кут:

$$\sin 4\varphi \ge 0 \quad \Rightarrow \quad 2\pi k \le 4\varphi \le \pi + 2\pi k \quad \Rightarrow \quad \frac{\pi k}{2} \le \varphi \le \frac{\pi}{4} + \frac{\pi k}{2}, \quad k \in \mathbb{Z}\,.$$

Враховуючи симетрію фігури (рис. 50) знайдемо шукану площу за формулою

$$S = 8S_{OBA} = 8 \cdot \frac{1}{2}\int_{\alpha}^{\beta} \rho^2(\varphi)\, d\varphi = 4\int_{0}^{\frac{\pi}{8}} a^2 \sin 4\varphi\, d\varphi = -a^2 \cos 4\varphi\Big|_0^{\frac{\pi}{8}} = a^2\,.$$

2511. Обчислити площу фігури, обмеженої лінією $x^4 + y^4 = x^2 + y^2$.

Розв'язання. В полярних координатах (1) рівняння лінії $x^4 + y^4 = x^2 + y^2$ прийме такий вигляд:

$$\rho^4(\cos^4\varphi + \sin^4\varphi) =$$

$$= \rho^2(\cos^2\varphi + \sin^2\varphi) \quad \Rightarrow$$

$$\rho^2(\varphi) = \frac{1}{\cos^4\varphi + \sin^4\varphi}.$$

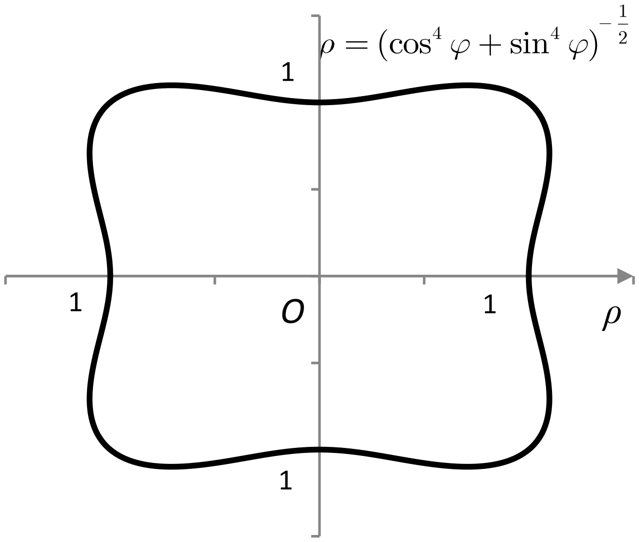


Рис. 51

Ця лінія симетрична відносно полюса, оскільки $\rho(\varphi + \pi) = \rho(\varphi)$. Оскільки $\rho(-\varphi) = \rho(\varphi)$, то ця функція парна і її графік симетричний відносно полярної осі. І, нарешті, лінія симетрична відносно прямої $\varphi = \dfrac{\pi}{4}$, оскільки $\forall \quad \varphi \in [0, \frac{\pi}{4}], \quad \rho(\varphi) = \rho\left(\dfrac{\pi}{2} - \varphi\right)$. Дійсно,

$$\frac{1}{\sqrt{\cos^4\varphi + \sin^4\varphi}} = \frac{1}{\sqrt{\cos^4(\frac{\pi}{2} - \varphi) + \sin^4(\frac{\pi}{2} - \varphi)}}\,.$$

Нехай S_1 – одна восьма частина площі фігури (рис. 51). Знайдемо шукану площу за формулою

$$S = 8S_1 = 8 \cdot \frac{1}{2}\int\limits_{\alpha}^{\beta} \rho^2(\varphi)\, d\varphi = 4\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{4}} \frac{d\varphi}{\cos^4\varphi + \sin^4\varphi} = 4\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{4}} \frac{\cos^2\varphi + \sin^2\varphi}{\cos^4\varphi + \sin^4\varphi} d\varphi =$$

$$= 4\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{4}} \frac{1+tg^2\varphi}{1+tg^4\varphi} \cdot \frac{d\varphi}{\cos^2\varphi} = \left| \begin{array}{ll} u = \operatorname{tg}\varphi, & \begin{array}{|c|c|c|} \hline \varphi & 0 & \frac{\pi}{4} \\ \hline u & 0 & 1 \\ \hline \end{array} \\ du = \dfrac{d\varphi}{\cos^2\varphi} & \end{array} \right| = 4\int\limits_{0}^{1} \frac{1+u^2}{1+u^4} du\,.$$

Для обчислення цього інтеграла розкладемо знаменник підінтегральної функції на множники:

$$1+u^4 = (1+u^4+2u^2) - 2u^2 = (1+u^2)^2 - (\sqrt{2}u)^2 = (1+u^2+\sqrt{2}u)(1+u^2-\sqrt{2}u),$$

а потім розкладемо правильний раціональний дріб на суму елементарних дробів:

$$\frac{1+u^2}{1+u^4} = \frac{1+u^2}{(1+u^2+\sqrt{2}u)(1+u^2-\sqrt{2}u)} = \frac{Au+B}{1+u^2+\sqrt{2}u} + \frac{Cu+D}{1+u^2-\sqrt{2}u}.$$

Раціональні дробі рівні. Знаменники співпадають, отже співпадають чисельники

$$1+u^2 = (Au+B)(1+u^2-\sqrt{2}u) + (Cu+D)(1+u^2+\sqrt{2}u)\,.$$

Знайдемо коефіцієнти A, B, C, D методом порівняння коефіцієнтів при однакових степенях u

$$\left.\begin{array}{l} u^3: A+C=0, \\ u^2: -A\sqrt{2}+B+C\sqrt{2}+D=1, \\ u\ \ : A-B\sqrt{2}+C+D\sqrt{2}=0, \\ u^0: B+D=1 \end{array}\right\} \Leftrightarrow \begin{cases} A=-C, \\ B=1-D, \\ 2C\sqrt{2}=0, \\ A-B\sqrt{2}+C+D\sqrt{2}=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} C=0, \\ A=0, \\ B=D=\dfrac{1}{2}. \end{cases}$$

Отже, розклад правильної раціональної дробі на суму елементарних має вигляд

$$\frac{1+u^2}{1+u^4} = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{1+u^2+\sqrt{2}u} + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{1+u^2-\sqrt{2}u}.$$

Тоді

$$S=4\int_0^1\frac{1+u^2}{1+u^4}du=2\int_0^1\frac{du}{u^2+\sqrt{2}u+1}+2\int_0^1\frac{du}{u^2-\sqrt{2}u+1}=$$

$$=2\int_0^1\frac{du}{(u+\frac{\sqrt{2}}{2})^2+(\frac{\sqrt{2}}{2})^2}+2\int_0^1\frac{du}{(u-\frac{\sqrt{2}}{2})^2+(\frac{\sqrt{2}}{2})^2}=$$

$$=\frac{4}{\sqrt{2}}\left(\operatorname{arctg}(\sqrt{2}u+1)\Big|_0^1+\operatorname{arctg}(\sqrt{2}u-1)\Big|_0^1\right)=$$

$$=\frac{4}{\sqrt{2}}(\operatorname{arctg}(\sqrt{2}+1)+\operatorname{arctg}(\sqrt{2}-1)).$$

Покажемо, що $\operatorname{arctg}(\sqrt{2}+1)+\operatorname{arctg}(\sqrt{2}-1)=\frac{\pi}{2}$.

Ця рівність випливає з таких співвідношень:

$$\operatorname{arctg}(\sqrt{2}+1)=\frac{\pi}{2}-\operatorname{arctg}(\sqrt{2}-1)\quad\Rightarrow$$

$$\operatorname{tg}\ \operatorname{arctg}(\sqrt{2}+1)\ =\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2}-\operatorname{arctg}(\sqrt{2}-1)\right)\quad\Rightarrow$$

$$\sqrt{2}+1=\operatorname{ctg}\left(\operatorname{arctg}\frac{1}{\sqrt{2}-1}\right)\quad\Rightarrow\quad\sqrt{2}+1=\frac{1}{\sqrt{2}-1}\ \Rightarrow\ \sqrt{2}+1=\sqrt{2}+1.$$

$$\operatorname{arctg}(\sqrt{2}+1)=\operatorname{arcctg}\frac{1}{\sqrt{2}-1}=\operatorname{arcctg}(\sqrt{2}+1)=\frac{\pi}{2}-\operatorname{arctg}(\sqrt{2}-1).$$

Отже, площа шуканої фігури $S=\frac{4}{\sqrt{2}}\cdot\frac{\pi}{2}=\sqrt{2}\pi$.

2518. Для лінії $\rho=\frac{\cos 2\varphi}{\cos\varphi}$ знайти площу петлі та площу фігури, що лежить між лінією та її асимптотою.

Розв'язання. Для побудови лінії, що задана за умовою задачі, перепишемо її рівняння у вигляді

$$\rho = \frac{\cos 2\varphi}{\cos\varphi} = = 2\cos\varphi - \frac{1}{\cos\varphi} = \rho_1 - \rho_2 .$$

Побудувавши коло $\rho = 2\cos\varphi$ (рис. 52) та пряму $\rho = \dfrac{1}{\cos\varphi}$ (рис. 53), методом віднімання графіків одержимо потрібну лінію $\rho = \dfrac{\cos 2\varphi}{\cos\varphi}$ (рис. 54).

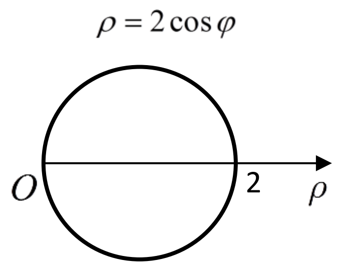


Рис. 52

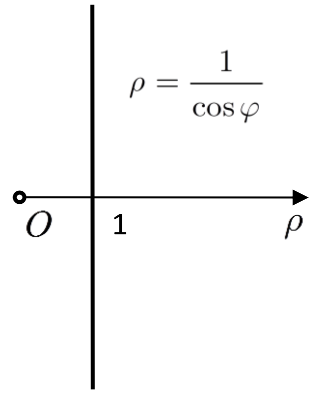


Рис. 53

а) Знайдемо площу S_1 петлі

$$S_1 = 2S_{OAB} = 2\cdot\frac{1}{2}\int_{\alpha}^{\beta}\rho^2(\varphi)\,d\varphi = \int_0^{\frac{\pi}{4}}\left(2\cos\varphi - \frac{1}{\cos\varphi}\right)^2 d\varphi =$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{4}}\left(4\cos^2\varphi - 4 + \frac{1}{\cos^2\varphi}\right)d\varphi = 2\int_0^{\frac{\pi}{4}}(1+\cos 2\varphi)\,d\varphi - \pi + \operatorname{tg}\varphi\Big|_0^{\frac{\pi}{4}} =$$

$$= \frac{\pi}{2} + \sin 2\varphi\Big|_0^{\frac{\pi}{4}} - \pi + 1 = 2 - \frac{\pi}{2}.$$

б) Знайдемо площу фігури, що лежить між лінією та її асимптотою. Якщо вибрати довільно кут $\dfrac{\pi}{4} \le \varphi \le \dfrac{\pi}{2}$, то площу фігури $MORPN$ (рис. 54) можна знайти за допомогою співвідношення

$$S_{MORPN} = S_{\Delta OMN} - S_{PRO},$$

тобто за допомогою формули

$$S_{MORPN} = \frac{1}{2}\int_{\frac{\pi}{4}}^{\varphi}\left(\frac{1}{\cos^2\varphi} - \frac{\cos^2 2\varphi}{\cos^2\varphi}\right)d\varphi = \frac{1}{2}\int_{\frac{\pi}{4}}^{\varphi}\frac{1-\cos^2 2\varphi}{\cos^2\varphi}\,d\varphi = \frac{1}{2}\int_{\frac{\pi}{4}}^{\varphi}\frac{\sin^2 2\varphi}{\cos^2\varphi}\,d\varphi .$$

Площу фігури $DOPRN$ знайдемо, додавши до S_{MORPN} площу трикутника

$S_{\Delta MDO}=\dfrac{1}{2}.$ Тоді площу всієї нескінченної криволінійної трапеції, що має основу DO та обмежена частиною кривої, якій належать точки O, P, R (рис. 54) можна знайти за допомогою суми невласного інтегралу 2-го роду $\dfrac{1}{2}\int\limits_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\dfrac{\sin^2 2\varphi}{\cos^2\varphi}\,d\varphi$ та площі трикутника $S_{\Delta MDO}=\dfrac{1}{2}.$

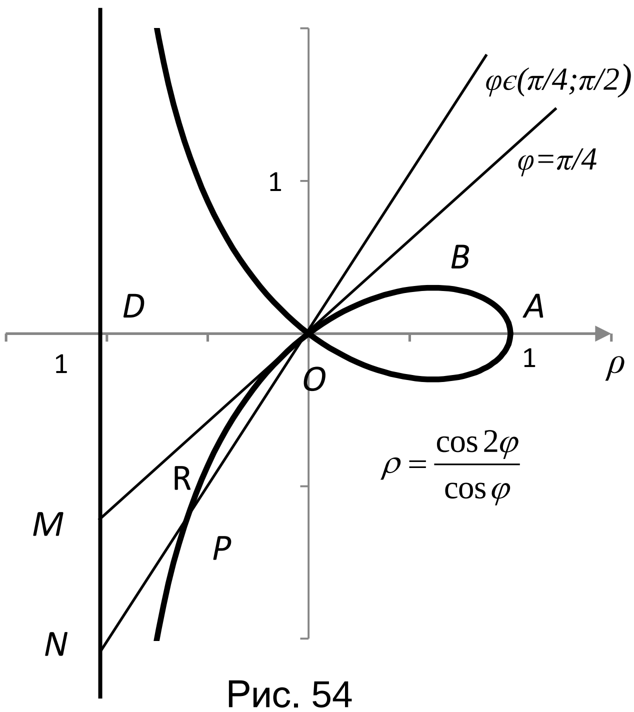


Рис. 54

Отже,
$$S_{DOPRN}=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\lim_{\varepsilon\to 0}\int\limits_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}-\varepsilon}\frac{\sin^2 2\varphi}{\cos^2\varphi}\,d\varphi.$$

Враховуючи симетрію фігури, шукану площу знайдемо за формулою

$$S=2S_{DOPRN}=1+\lim_{\varepsilon\to 0}\int\limits_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}-\varepsilon}\frac{\sin^2 2\varphi}{\cos^2\varphi}\,d\varphi=1+\lim_{\varepsilon\to 0}\int\limits_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}-\varepsilon}\frac{4\sin^2\varphi\,\cancel{\cos^2\varphi}}{\cancel{\cos^2\varphi}}\,d\varphi=$$

$$=1+4\int\limits_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\sin^2\varphi\,d\varphi=1+2\int\limits_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}(1-\cos 2\varphi)\,d\varphi=1+\frac{\pi}{2}-\sin 2\varphi\Big|_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}=2+\frac{\pi}{2}.$$

3. ЗАСТОСУВАННЯ ПОЛЯРНИХ КООРДИНАТ ДО РОЗВ'ЯЗАННЯ ЗАДАЧ НА ЗНАХОДЖЕННЯ ДОВЖИНИ ДУГИ КРИВОЇ

Обчислення довжини дуги кривої, заданої в полярній системі координат

Нехай крива AB задана рівнянням $\rho = \rho(\varphi), \quad \alpha \le \varphi \le \beta$, в полярній системі координат, причому функція $\rho(\varphi)$ – неперервна і має неперервну похідну $\rho'(\varphi)$ на відрізку $[\alpha;\beta]$.

Покажемо, що **формула для обчислення довжини дуги кривої, яка задана в полярній системі координат** має вигляд:

$$\ell = \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{(\rho(\varphi))^2 + (\rho'(\varphi))^2}\, d\varphi\,.$$

Для цього в формули (1), які пов'язують прямокутні декартові та полярні координати підставимо задану функцію $\rho = \rho(\varphi)$. Отримаємо параметричне рівняння кривої

$$AB : \begin{cases} x = \rho(\varphi)\cos\varphi, \\ y = \rho(\varphi)\sin\varphi. \end{cases}$$

Скористаємося формулою для обчислення довжини дуги кривої, яка задана параметрично:

$$\ell = \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{(x'(\varphi))^2 + (y'(\varphi))^2}\, d\varphi =$$

$$= \left| \begin{array}{l} \quad x'(\varphi) = \rho'(\varphi)\cos\varphi - \rho(\varphi)\sin\varphi, \\ \quad y'(\varphi) = \rho'(\varphi)\sin\varphi + \rho(\varphi)\cos\varphi, \\ (x'(\varphi))^2 + (y'(\varphi))^2 = (\rho'(\varphi))^2 \overbrace{(\cos^2\varphi + \sin^2\varphi)}^{=1} - \cancel{2\rho(\varphi)\rho'(\varphi)\sin\varphi\cos\varphi} + \\ + \cancel{2\rho(\varphi)\rho'(\varphi)\sin\varphi\cos\varphi} + \rho^2(\varphi)\overbrace{(\cos^2\varphi + \sin^2\varphi)}^{=1} = \rho^2(\varphi) + (\rho'(\varphi))^2 \end{array} \right| =$$

$$= \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{(\rho(\varphi))^2 + (\rho'(\varphi))^2}\, d\varphi\,.$$

2543. Знайти довжину дуги архімедової спіралі $\rho = a\,\varphi$ від початку до кінця першого витка.

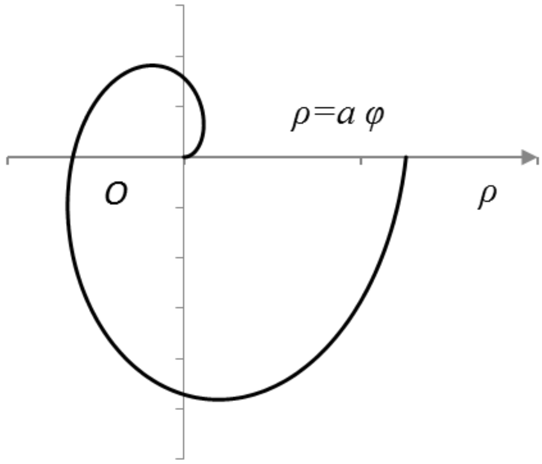


Рис. 55

Розв'язання. Довжину дуги першого витка архімедової спіралі $\rho = a\,\varphi$ (рис. 55) будемо обчислювати за формулою

$$\ell = \int\limits_{\alpha}^{\beta} \sqrt{(\rho(\varphi))^2 + (\rho'(\varphi))^2}\,d\varphi,$$

де $\rho(\varphi) = a\varphi,\quad \rho'(\varphi) = a$, $0 \le \varphi \le 2\pi$, отже,

$$\ell = \int\limits_0^{2\pi} \sqrt{a^2\varphi^2 + a^2}\,d\varphi = \underbrace{a\int\limits_0^{2\pi} \sqrt{\varphi^2+1}\;d\varphi}_{\text{Позначимо } I} = \left| \begin{array}{l} \int\limits_a^b u\,dv = uv\Big|_a^b - \int\limits_a^b u\,dv, \\ u = \sqrt{\varphi^2+1}, \quad dv = d\varphi, \\ du = \dfrac{\varphi\,d\varphi}{\sqrt{\varphi^2+1}}, \quad v = \varphi \end{array} \right| =$$

$$= a\left(\varphi\sqrt{\varphi^2+1}\Big|_0^{2\pi} - \int\limits_0^{2\pi} \frac{\varphi^2 d\varphi}{\sqrt{\varphi^2+1}}\right) = a\left(2\pi\sqrt{4\pi^2+1} - \underbrace{\int\limits_0^{2\pi}\sqrt{\varphi^2+1}\;d\varphi}_{I} + \int\limits_0^{2\pi} \frac{d\varphi}{\sqrt{\varphi^2+1}}\right).$$

Розв'яжемо отримане рівняння:

$$\underline{\underline{a\cdot I}} = 2\pi a\sqrt{4\pi^2+1} - \underline{\underline{a\cdot I}} + a\int\limits_0^{2\pi} \frac{d\varphi}{\sqrt{\varphi^2+1}}$$

відносно інтеграла $I = \int\limits_0^{2\pi} \sqrt{\varphi^2+1}\;d\varphi$, отримаємо:

$$2a\int\limits_0^{2\pi} \sqrt{\varphi^2+1}\;d\varphi = 2\pi a\sqrt{4\pi^2+1} + a\ln\left|\varphi + \sqrt{\varphi^2+1}\right|_0^{2\pi},$$

звідки $$\int\limits_0^{2\pi} \sqrt{\varphi^2+1}\;d\varphi = \pi\sqrt{4\pi^2+1} + \frac{1}{2}\ln\left|2\pi + \sqrt{4\pi^2+1}\right|.$$

Тоді довжина дуги першого витка архімедової спіралі

$$\ell = aI = \pi a\sqrt{4\pi^2+1} + \frac{a}{2}\ln\left|2\pi + \sqrt{4\pi^2+1}\right|.$$

6.508. Знайти довжину дуги логарифмічної спіралі $\rho = e^{m\varphi}$, яка міститься всередині кола $\rho = 1$, $(m > 0)$.

Розв'язання. Знайдемо значення кута, при якому перетинаються задані криві:

$$\begin{cases}\rho = 1,\\ \rho = e^{m\varphi}\end{cases} \Rightarrow \quad e^{m\varphi} = 1 \quad \Rightarrow$$

$\varphi = 0$, отже, $-\infty < \varphi \le 0$.

Довжину дуги довжину дуги логарифмічної спіралі $\rho = e^{m\varphi}$, яка міститься всередині кола $\rho = 1$ (рис. 56), будемо обчислювати за формулою

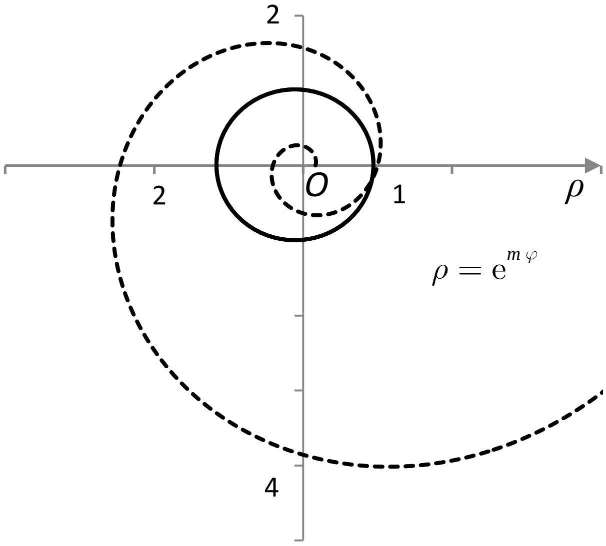


Рис. 56

$$\ell = \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{(\rho(\varphi))^2 + (\rho'(\varphi))^2}\, d\varphi\,,$$

де $\rho(\varphi) = e^{m\varphi}$, $\rho'(\varphi) = m e^{m\varphi}$. Отже,

$$\ell = \underbrace{\int_{-\infty}^{0} \sqrt{e^{2m\varphi} + m^2 e^{2m\varphi}}\, d\varphi}_{\text{Невласний інтеграл 1-го роду}} = \lim_{a\to-\infty}\int_{a}^{0} e^{m\varphi}\sqrt{1+m^2}\, d\varphi = \frac{\sqrt{1+m^2}}{m}\lim_{a\to-\infty} e^{m\varphi}\Big|_{a}^{0} =$$

$$= \frac{\sqrt{1+m^2}}{m}\lim_{a\to-\infty}(1 - e^{ma}) = \frac{\sqrt{1+m^2}}{m}.$$

2544. Довести, що дуга параболи $y = \dfrac{x^2}{2p}$, яка відповідає інтервалу $0 \le x \le a$, має ту саму довжину, що і дуга архімедової спіралі

$\rho = p\cdot\varphi$, яка відповідає інтервалу $0 \le \rho \le a$ (рис. 12).

Розв'язання. Позначимо довжину дуги параболі $y = \dfrac{x^2}{2p}$ через ℓ_1**,** а довжину дуги архімедової спіралі $\rho = p\cdot\varphi$ – через ℓ_2**.** Запишемо формули для знаходження довжин ℓ_1 і ℓ_2 та порівняємо їх.

$$\ell_1 = \int_a^b \sqrt{1+(y'(x))^2}\, dx = \int_0^a \sqrt{1+\frac{x^2}{p^2}}\, dx.$$

Знайдемо ℓ_2. Оскільки $0 \le \rho \le a$, то $0 \le \varphi \le \dfrac{a}{p}$,

$$\ell_2 = \int_\alpha^\beta \sqrt{(\rho(\varphi))^2 + (\rho'(\varphi))^2}\, d\varphi = \int_0^{\frac{a}{p}} \sqrt{p^2 + p^2\varphi^2}\, d\varphi = p\int_0^{\frac{a}{p}} \sqrt{1+\varphi^2}\, d\varphi =$$

$$= \left| \begin{array}{c} \varphi = \dfrac{x}{p}, \quad d\varphi = \dfrac{dx}{p}, \\ \begin{array}{|c|c|c|} \hline \varphi & 0 & \frac{a}{p} \\ \hline x & 0 & a \\ \hline \end{array} \end{array} \right| = p\int_0^a \sqrt{1+\frac{x^2}{p^2}}\,\frac{dx}{p} = \int_0^a \sqrt{1+\frac{x^2}{p^2}}\, dx.$$

Отже, $\ell_1 = \ell_2$.

2545. Обчислити довжину дуги гіперболічної спіралі $\rho\varphi = 1$ від $\varphi_1 = \dfrac{3}{4}$ до $\varphi_2 = \dfrac{4}{3}$.

Розв'язання. Довжину дуги гіперболічної спіралі $\rho\varphi = 1$ (рис. 43) будемо обчислювати за формулою

$$\ell = \int_\alpha^\beta \sqrt{(\rho(\varphi))^2 + (\rho'(\varphi))^2}\, d\varphi,$$

де $$\rho(\varphi) = \frac{1}{\varphi}, \quad \rho'(\varphi) = -\frac{1}{\varphi^2}, \quad \frac{3}{4} \le \varphi \le \frac{4}{3}.$$

Отже, $$\ell=\int_{\frac{3}{4}}^{\frac{4}{3}}\sqrt{\frac{1}{\varphi^2}+\frac{1}{\varphi^4}}\,d\varphi=\int_{\frac{3}{4}}^{\frac{4}{3}}\frac{1}{\varphi}\sqrt{1+\frac{1}{\varphi^2}}\,d\varphi=$$

$$=\left|\begin{array}{l} t=\sqrt{1+\dfrac{1}{\varphi^2}},\quad \dfrac{1}{\varphi^2}=t^2-1,\quad \begin{array}{|c|c|c|}\hline \varphi & \frac{3}{4} & \frac{4}{3}\\ \hline t & \frac{5}{3} & \frac{5}{4}\\ \hline\end{array} \\ \varphi=(t^2-1)^{-\frac{1}{2}},\quad d\varphi=-t(t^2-1)^{-\frac{3}{2}}dt \end{array}\right|=-\int_{\frac{5}{3}}^{\frac{5}{4}}(t^2-1)^{\frac{1}{2}}\cdot t^2\cdot(t^2-1)^{-\frac{3}{2}}dt=$$

$$=-\int_{\frac{5}{3}}^{\frac{5}{4}}\frac{t^2}{t^2-1}dt=-t\Big|_{\frac{5}{3}}^{\frac{5}{4}}-\int_{\frac{5}{3}}^{\frac{5}{4}}\frac{dt}{t^2-1}=\frac{5}{12}-\frac{1}{2}\ln\left|\frac{t-1}{t+1}\right|\Bigg|_{\frac{5}{3}}^{\frac{5}{4}}=\frac{5}{12}+\ln\frac{3}{2}.$$

2546. Знайти довжину кардіоїди $\rho=a(1+\cos\varphi)$.

Розв'язання. Довжину кардіоїди $\rho=a(1+\cos\varphi)$ (див. рис. 21) будемо обчислювати за формулою

$$\ell=\int_{\alpha}^{\beta}\sqrt{(\rho(\varphi))^2+(\rho'(\varphi))^2}\,d\varphi,$$

де $$\rho(\varphi)=a(1+\cos\varphi),\quad \rho'(\varphi)=-a\sin\varphi,\quad 0\le\varphi\le 2\pi,$$

$$(\rho(\varphi))^2+(\rho'(\varphi))^2==a^2((1+\cos\varphi)^2+\sin^2\varphi)=$$

$$=a^2(1+2\cos\varphi+\cos^2\varphi+\sin^2\varphi)=2a^2(1+\cos\varphi).$$

Використовуючи симетрію кривої, дістанемо

$$\ell=2\int_0^{\pi}\sqrt{2a^2(1+\cos\varphi)}\,d\varphi=2\int_0^{\pi}\sqrt{4a^2\cos^2\frac{\varphi}{2}}\,d\varphi=$$

$$=4a\int_0^{\pi}\cos\frac{\varphi}{2}\,d\varphi=8a\sin\frac{\varphi}{2}\Big|_0^{\pi}=8a.$$

6.509. Знайти довжину кардіоїди $\rho=2(1-\cos\varphi)$, яка міститься всередині кола $\rho=1$.

Розв'язання. Знайдемо полярні кути точок перетину заданих кривих:

$$\begin{cases}\rho = 1,\\ \rho = 2(1-\cos\varphi)\end{cases} \Rightarrow \cos\varphi = \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow \quad \varphi = \pm\frac{\pi}{3} + 2\pi n, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

Довжину дуги кардіоїди $\rho = 2(1-\cos\varphi)$, яка міститься всередині кола $\rho = 1$ (рис. 57) будемо обчислювати за формулою

$$\ell = \int\limits_{\alpha}^{\beta} \sqrt{(\rho(\varphi))^2 + (\rho'(\varphi))^2}\, d\varphi,$$

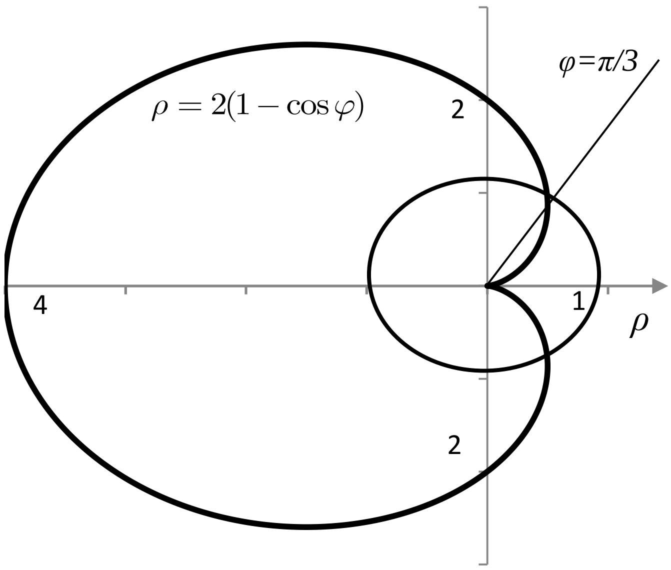


Рис. 57

де

$$\rho(\varphi) = 2(1-\cos\varphi), \qquad \rho'(\varphi) = 2\sin\varphi,$$

$$(\rho(\varphi))^2 + (\rho'(\varphi))^2 = 4((1-\cos\varphi)^2 + \sin^2\varphi) =$$

$$= 4(1-2\cos\varphi + \cos^2\varphi + \sin^2\varphi) = 8(1-\cos\varphi).$$

Використовуючи симетрію кривої, дістанемо

$$\ell = 2\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{3}} \sqrt{8(1-\cos\varphi)}\, d\varphi = 2\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{3}} \sqrt{16\sin^2\frac{\varphi}{2}}\, d\varphi = 8\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{3}} \sin\frac{\varphi}{2}\, d\varphi =$$

$$= -16\cos\frac{\varphi}{2}\Bigg|_{0}^{\frac{\pi}{3}} = -16\left(\frac{\sqrt{3}}{2} - 1\right) = 8(2-\sqrt{3}).$$

2547. Знайти довжину лінії $\rho = a\sin^3\frac{\varphi}{3}$, $a > 0$.

Розв'язання. Довжину лінії $\rho = a\sin^3\frac{\varphi}{3}$ (див. рис. 46) будемо обчислювати за формулою

$$\ell = \int\limits_{\alpha}^{\beta} \sqrt{(\rho(\varphi))^2 + (\rho'(\varphi))^2}\, d\varphi,$$

де $\rho(\varphi) = a\sin^3\frac{\varphi}{3}, \quad \rho'(\varphi) = a\sin^2\frac{\varphi}{3}\cos\frac{\varphi}{3}, \quad 0 \le \varphi \le 3\pi$,

$$\rho^2(\varphi) + (\rho'(\varphi))^2 = a^2\left(\sin^6\frac{\varphi}{3} + \sin^4\frac{\varphi}{3}\cos^2\frac{\varphi}{3}\right) = a^2\sin^4\frac{\varphi}{3}.$$

Використовуючи симетрію лінії, дістанемо

$$\ell = 2\int_0^{\frac{3\pi}{2}}\sqrt{a^2\sin^4\frac{\varphi}{3}}\,d\varphi = 2a\int_0^{\frac{3\pi}{2}}\sin^2\frac{\varphi}{3}\,d\varphi = a\int_0^{\frac{3\pi}{2}}(1-\cos\frac{2\varphi}{3})\,d\varphi =$$

$$= a\frac{3\pi}{2} - a\frac{3}{2}\sin\frac{2\varphi}{3}\Bigg|_0^{\frac{3\pi}{2}} = \frac{3\pi a}{2}.$$

6.510. Знайти довжину лінії $\rho = a\cos^3\frac{\varphi}{3}$, $a > 0$.

Розв'язання. Помітимо, що з рівності $\rho(\varphi) = a\cos^3\frac{\varphi}{3}$ випливає рівність $\rho\left(\frac{3\pi}{2} - \varphi\right) = a\cos^3\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\varphi}{3}\right) =$ $= a\sin^3\frac{\varphi}{3}$. Тобто графік функції $\rho = a\cos^3\frac{\varphi}{3}$ одержимо, обернувши графік функції $\rho = a\sin^3\frac{\varphi}{3}$ (див. рис. 46) на кут $\frac{3\pi}{2}$ за годинниковою стрілкою (рис. 58). Тому довжини ліній $\rho = a\cos^3\frac{\varphi}{3}$ та $\rho = a\sin^3\frac{\varphi}{3}$ співпадають. Отже, $\ell = \frac{3\pi a}{2}$ (див. задачу 2547).

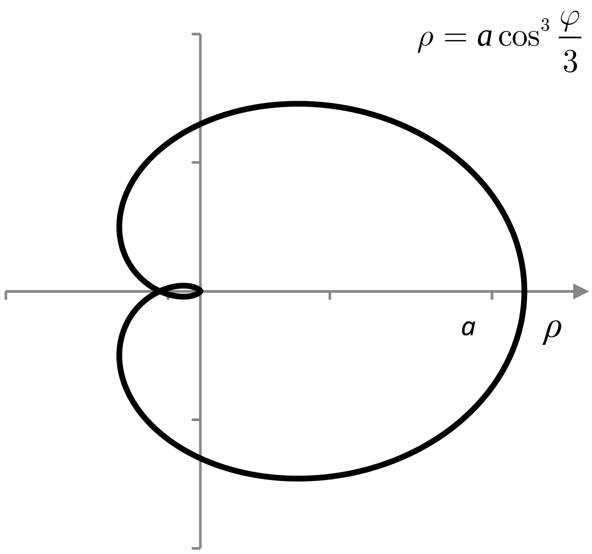


Рис. 58

2548. Довести, що довжина лінії $\rho = a\sin^m \frac{\varphi}{m}$ ($m-$ ціле число) сумірна з числом a, при m парному та сумірна з довжиною кола радіуса a при m непарному.

Розв'язання. Дві однорідні величини (наприклад, довжини, або площі), які мають спільну міру (так називають величину тієї же природи, що і ці величини) і яка міститься ціле число раз в кожній з них, називаються **сумірними**. Якщо величини сумірні, то їх відношення виражається раціональним числом[8].

Нехай $a > 0$. Для обчислення довжини дуги кривої $\rho = a\sin^m \frac{\varphi}{m}$ ($m-$ ціле число), доведемо спочатку, що ця крива є симетричною відносно прямої $\varphi = \frac{m\pi}{2}$, якщо $\varphi \in [0; m\pi]$. Це буде дійсно так, якщо виконується рівність $\rho(\alpha) = \rho(m\pi - \alpha)$. Дійсно, $\rho(\alpha) = a\sin^m \frac{\alpha}{m}$, а

$$\rho(m\pi - \alpha) = a\sin^m \frac{(m\pi - \alpha)}{m} = a\sin^m \left(\pi - \frac{\alpha}{m}\right) =$$

$$= a\left(\sin\pi\cos\frac{\alpha}{m} - \sin\frac{\alpha}{m}\cos\pi\right)^m = a\sin^m \frac{\alpha}{m} = \rho(\alpha).$$

Тоді, враховуючи симетрію кривої відносно прямої $\varphi = \frac{m\pi}{2}$, знайдемо її довжину $L = 2\ell$, де ℓ – довжина кривої $\rho(\alpha) = a\sin^m \frac{\alpha}{m}$ при $\varphi \in \left[0; \frac{m\pi}{2}\right]$. Оскільки довжина дуги кривої

$$\ell = \int_\alpha^\beta \sqrt{(\rho(\varphi))^2 + (\rho'(\varphi))^2}\, d\varphi,$$

де $$\rho(\varphi) = a\sin^m \frac{\varphi}{m}, \quad \rho'(\varphi) = a\sin^{m-1}\frac{\varphi}{m}\cos\frac{\varphi}{m}, \quad 0 \le \varphi \le \frac{m\varphi}{2},$$

[8] Математическая энциклопедия, том 5, стр 73, издательство «Советская энциклопедия», Москва, 1985.

$$\rho^2(\varphi)+(\rho'(\varphi))^2 = a^2\left(\sin^{2m}\frac{\varphi}{m}+\sin^{2m-2}\frac{\varphi}{m}\cos^2\frac{\varphi}{m}\right)=a^2\sin^{2m-2}\frac{\varphi}{m},$$

то $$L=2\int_0^{\frac{m\pi}{2}}\sqrt{a^2\sin^{2m-2}\frac{\varphi}{m}}\,d\varphi=2a\int_0^{\frac{m\pi}{2}}\sin^{m-1}\frac{\varphi}{m}\,d\varphi=$$

$$=\left|\begin{array}{cc} t=\dfrac{\varphi}{m}, & \begin{array}{|c|c|c|}\hline \varphi & 0 & \frac{m\pi}{2} \\ \hline t & 0 & \frac{\pi}{2} \\ \hline\end{array} \\ \varphi=mt, & d\varphi=mdt \end{array}\right|=2am\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{m-1}t\,dt.$$

Скористаємося формулою[9]

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^n t\,dt=\begin{cases}\dfrac{(2k-1)!!}{(2k)!!}\cdot\dfrac{\pi}{2}, & n=2k,\\ \dfrac{(2k)!!}{(2k+1)!!}, & n=2k+1.\end{cases}$$

Нехай $m=2k+1,\quad k\in\mathbb{Z}$. Тоді

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{m-1}t\,dt=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{2k}t\,dt=\frac{(2k-1)!!}{(2k)!!}\cdot\frac{\pi}{2}.$$

Тоді довжина кривої

$$L=2am\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{m-1}t\,dt=2a\,(2k+1)\cdot\frac{(2k-1)!!}{(2k)!!}\frac{\pi}{2}.$$

і оскільки число $2\pi a$ є довжиною кола радіуса a, а число $\frac{(2k+1)}{2}\frac{(2k-1)!!}{(2k)!!}$ є раціональним, то величини L і $2\pi a$ є сумірними.

Нехай $m=2k+2,\quad k\in\mathbb{Z}$. Тоді

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{m-1}t\,dt=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{2k+1}t\,dt=\frac{(2k)!!}{(2k+1)!!}.$$

Тоді довжина кривої

[9] Символ $n!!$ означає добуток натуральних чисел, які не перевищують числа n і однієї з ним парності.

$$L = 2am\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{m-1} t \; dt = 2a\,(2k+2)\cdot\frac{(2k)!!}{(2k+1)!!}$$

і оскільки число $2\,(2k+2)\dfrac{(2k)!!}{(2k+1)!!}$ також є раціональним, то величини L і a є сумірними.

6.511. Знайти довжину дуги спіралі Архімеда $\rho = 5\varphi$, яка міститься в середині кола $\rho = 10\pi$.

Розв'язання. Знайдемо значення кута, при якому перетинаються задані криві:

$$\begin{cases}\rho = 5\varphi, \\ \rho = 10\pi\end{cases} \Rightarrow \quad \varphi = 2\pi.$$

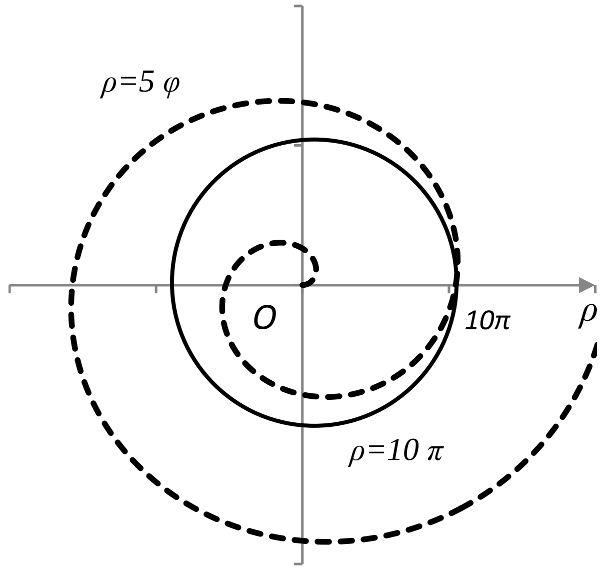


Рис. 59

Довжину дуги спіралі Архімеда $\rho = 5\varphi$, яка міститься в середині кола $\rho = 10\pi$ (рис. 59) будемо обчислювати за формулою

$$\ell = \int_\alpha^\beta \sqrt{(\rho(\varphi))^2 + (\rho'(\varphi))^2}\; d\varphi = \left| \begin{array}{l} \rho(\varphi) = 5\varphi, \quad \rho'(\varphi) = 5, \;\; 0 \le \varphi \le 2\pi, \\ (\rho(\varphi))^2 + (\rho'(\varphi))^2 = 25(\varphi^2+1), \end{array} \right| =$$

$$\pi = 5\int_0^{2\pi} \sqrt{\varphi^2+1}\; d\varphi = \frac{5}{2}\;\; \varphi\sqrt{\varphi^2+1} + \ln(\varphi + \sqrt{\varphi^2+1}) \;\; \Big|_0^{2\pi} =$$

$$= 5\pi\sqrt{4\pi^2+1} + \frac{5}{2}\ln(2\pi + \sqrt{4\pi^2+1}).$$

6.512. Знайти довжину лінії $\rho = a\sin^4\dfrac{\varphi}{4}$, $a > 0$.

Розв'язання. Довжину лінії $\rho = a\sin^4\dfrac{\varphi}{4}$ (див. рис. 60, при $a = 1$) будемо обчислювати за формулою

$$\ell = \int\limits_{\alpha}^{\beta} \sqrt{(\rho(\varphi))^2 + (\rho'(\varphi))^2}\ d\varphi\,,$$

де $\qquad \rho(\varphi) = a\sin^4\dfrac{\varphi}{4},$

$$\rho'(\varphi) = a\sin^3\frac{\varphi}{4}\cos\frac{\varphi}{4}, \quad 0 \le \varphi \le 4\pi\,,$$

$$\rho^2(\varphi) + (\rho'(\varphi))^2 =$$

$$= a^2\left(\sin^8\frac{\varphi}{4} + \sin^6\frac{\varphi}{4}\cos^2\frac{\varphi}{4}\right) = a^2\sin^6\frac{\varphi}{4}.$$

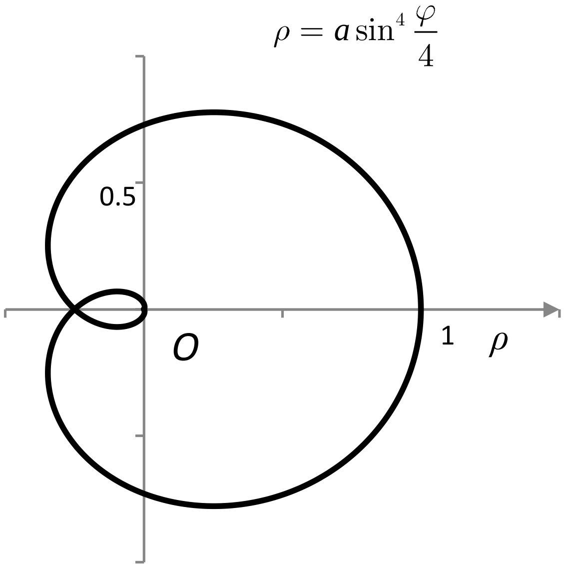


Рис. 60

Використовуючи симетрію лінії, дістанемо

$$\ell = 2\int\limits_0^{2\pi}\sqrt{a^2\sin^6\frac{\varphi}{4}}\ d\varphi = 2a\int\limits_0^{2\pi}\sin^3\frac{\varphi}{4}\ d\varphi = -8a\int\limits_0^{2\pi}\left(1-\cos^2\frac{\varphi}{4}\right)d\left(\cos\frac{\varphi}{4}\right) =$$

$$= -8a\left(\cos\frac{\varphi}{4} - \frac{1}{3}\cos^3\frac{\varphi}{4}\right)\Bigg|_0^{2\pi} = 8a\left(1-\frac{1}{3}\right) = \frac{16}{3}a\,.$$

4. ЗАСТОСУВАННЯ ПОЛЯРНИХ КООРДИНАТ ДО РОЗВ'ЯЗАННЯ ЗАДАЧ НА ЗНАХОДЖЕННЯ ОБ'ЄМІВ ТІЛ

Доведемо, що об'єм тіла, утвореного обертанням навколо полярної осі фігури, обмеженої кривою $\rho = \rho(\varphi)$, $0 \le \alpha \le \varphi \le \beta \le \pi$, де $\rho = \rho(\varphi)$ – деяка неперервна функція, можна знайти за формулою

$$V = \frac{2}{3}\pi\int_{\alpha}^{\beta} \rho^3(\varphi)\sin\varphi \, d\varphi .$$

Доведення. Проведемо розбиття сегмента $[\alpha;\beta]$ на n частин точками $\alpha = \varphi_0 < \varphi_1 < \ldots < \varphi_n = \beta$. Розглянемо плоску фігуру, обмежену променями $\varphi = \varphi_i$, $\varphi = \varphi_{i+1}$ та дугою кривої $\rho = \rho(\varphi)$, $\varphi_i \le \varphi \le \varphi_{i+1}$ (рис. 61) і виберемо значення ξ_i всередині інтервалу $[\varphi_i;\varphi_{i+1}]$. Позначимо $\Delta\varphi_i = \varphi_{i+1} - \varphi_i$, $i = 0,1,2,\ldots,n-1$. Нехай величина $\Delta\varphi_i$ настільки мала, що значення $\rho(\xi_i)$ можна вважати сталим на проміжку $\varphi_i \le \varphi \le \varphi_{i+1}$, тобто саму фігуру, зображену на рис. 61 замінимо наближено круговим сектором A_iOB_i радіуса $\rho(\xi_i)$ з кутом $\Delta\varphi_i$.

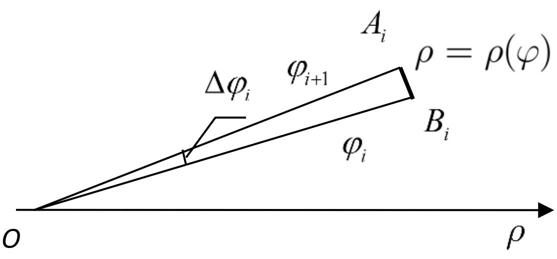


Рис. 61

Нехай цей сектор обертається навколо полярної осі.
Об'єм ΔV_i одержаної фігури (рис. 62) знайдемо як різницю об'ємів двох кульових секторів $\Delta V_i = V_i' - V_i''$, де

V_i' – об'єм кульового сектора, утвореного обертанням кругового сектора A_iOC_i навколо полярної осі,

V_i''– об'єм кульового сектора, утвореного обертанням кругового сектора B_iOC_i навколо полярної осі.

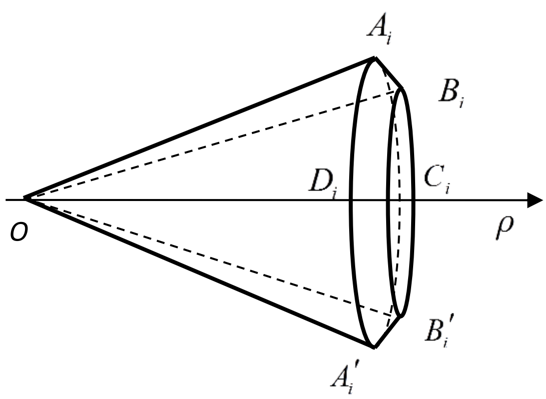


Рис. 62

Для знаходження V_i' скористаємося формулою для знаходження об'єму кульового сектора

$$V_i' = \frac{2}{3}\pi\rho^2(\xi_i)D_iC_i ,$$

де $\rho(\xi_i)$ – радіус сектора, а D_iC_i – висота кульового сегмента, що міститься в кульовому секторі. Таким чином

$$V_i' = \frac{2}{3}\pi\rho^2(\xi_i)\cdot(\rho(\xi_i) - \rho(\xi_i)\cos\varphi_{i+1}) = \frac{2}{3}\pi\rho^3(\xi_i)\cdot(1-\cos\varphi_{i+1}) .$$

Аналогічно,

$$V_i'' = \frac{2}{3}\pi\rho^2(\xi_i)\cdot(\rho(\xi_i) - \rho(\xi_i)\cos\varphi_i) = \frac{2}{3}\pi\rho^3(\xi_i)\cdot(1-\cos\varphi_i) .$$

Тоді

$$\Delta V_i = V_i' - V_i'' = \frac{2}{3}\pi\rho^3(\xi_i)\cdot(\cos\varphi_i - \cos\varphi_{i+1}) =$$

$$= \frac{4}{3}\pi\rho^3(\xi_i)\cdot\sin\frac{\varphi_i+\varphi_{i+1}}{2}\cdot\sin\frac{\Delta\varphi_i}{2}.$$

Знайшовші ΔV_i для будь-якого $i = 0,1,2,\ldots,n-1$ і склавши одержані значення, дістанемо наближене значення для шуканого об'єму V:

$$V \approx \frac{4}{3}\sum_{i=0}^{n-1}\pi\rho^3(\xi_i)\cdot\sin\frac{\varphi_i+\varphi_{i+1}}{2}\cdot\sin\frac{\Delta\varphi_i}{2} .$$

Нехай $\lambda = \max\limits_{0\le i\le n-1}\Delta\varphi_i$. Якщо величина λ достатньо мала, то

$$\sin\frac{\Delta\varphi_i}{2} \sim \frac{\Delta\varphi_i}{2}, \quad \sin\frac{\varphi_i+\varphi_{i+1}}{2} \sim \sin\xi_i ,$$

Тоді об'єм тіла, утвореного обертанням навколо полярної осі фігури, обмеженої кривою $\rho = \rho(\varphi)$

$$V \approx \frac{2}{3}\pi\sum_{i=0}^{n-1}\rho^3(\xi_i)\cdot\sin\xi_i\cdot\Delta\varphi_i$$

є інтегральною сумою для функції $\frac{2}{3}\pi\rho^3(\xi_i)\sin\xi_i$ на відрізку $\alpha \le \varphi \le \beta$.

Для того, щоб одержати точне значення V, перейдемо у цій формулі до границі при $\lambda \to 0$.

Якщо ця границя існує і не залежить ні від розбиття інтервалу $[\alpha;\beta]$, ні від вибору точки $\xi_i \in [\varphi_i;\varphi_{i+1}]$, то одержимо **формулу для обчислення об'єму тіла, утвореного обертанням навколо полярної осі фігури, обмеженої кривою** $\rho = \rho(\varphi)$

$$V = \frac{2}{3}\pi \lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=0}^{n-1}\rho^3(\xi_i)\cdot\sin\xi_i\cdot\Delta\varphi_i = \frac{2}{3}\pi\int_\alpha^\beta \rho^3(\varphi)\sin\varphi\, d\varphi\,.$$

6.543. Знайти об'єм тіла, утвореного обертанням кривої $\rho = a\sin^2\varphi$ навколо полярної осі.

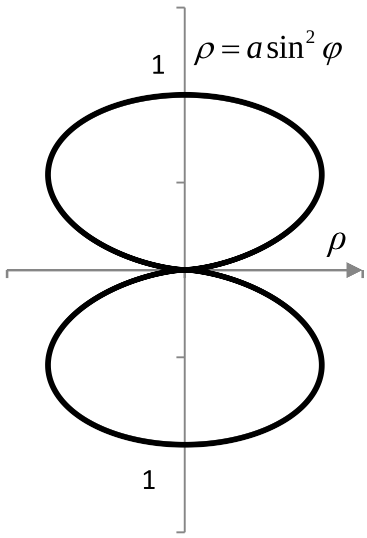


Рис. 63

Розв'язання. Знайдемо об'єм тіла обертання кривої $\rho = a\sin^2\varphi$ (рис. 63, при $a = 1$) навколо полярної осі за формулою

$$V = \frac{2}{3}\pi\int_\alpha^\beta \rho^3(\varphi)\sin\varphi\, d\varphi =$$

$$= \frac{2}{3}\pi\int_0^\pi a^3\sin^6\varphi\sin\varphi\, d\varphi =$$

$$= -\frac{2}{3}\pi a^3\int_0^\pi (1-\cos^2\varphi)^3\, d(\cos\varphi) =$$

$$= -\frac{2}{3}\pi a^3\int_0^\pi (1 - 3\cos^2\varphi + 3\cos^4\varphi - \cos^6\varphi)\, d(\cos\varphi) =$$

$$= -\frac{2}{3}\pi a^3\left(\cos\varphi - \cos^3\varphi + \frac{3}{5}\cos^5\varphi - \frac{1}{7}\cos^7\varphi\right)\Bigg|_0^\pi =$$

$$= -\frac{2}{3}\pi a^3\left(-\frac{6}{5} + \frac{2}{7}\right) = \frac{64}{105}\pi a^3.$$

2566 (6.544). Лемніската $(x^2+y^2)^2 = a^2(x^2-y^2), \quad a > 0$ обертається навколо осі абсцис. Знайти об'єм тіла обертання.

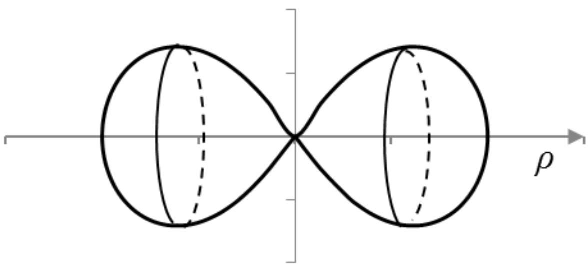


Рис. 64

Розв'язання. Рівняння лемніскати Бернуллі $(x^2+y^2)^2 = a^2(x^2-y^2), \quad a > 0$ в полярній системі координат (1) прийме вигляд $\rho = a\sqrt{\cos 2\varphi}$. Знайдемо, як змінюється кут:

$$cos2\varphi \geq 0 \quad \Rightarrow \quad 2\pi k - \frac{\pi}{2} \leq 2\varphi \leq \frac{\pi}{2} + 2\pi k, \quad \Rightarrow \quad \pi k - \frac{\pi}{4} \leq \varphi \leq \frac{\pi}{4} + \pi k \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Користуючись симетрією кривої, знайдемо об'єм тіла обертання (рис. 64)

$$V = 2 \cdot \frac{2}{3}\pi \int_{\alpha}^{\beta} \rho^3(\varphi) \sin\varphi \, d\varphi = \frac{4}{3}\pi a^3 \int_{0}^{\frac{\pi}{4}} (\cos 2\varphi)^{\frac{3}{2}} \sin\varphi \, d\varphi =$$

$$= -\frac{4}{3\sqrt{2}}\pi a^3 \int_{0}^{\frac{\pi}{4}} (2\cos^2\varphi - 1)^{\frac{3}{2}} d(\sqrt{2}\cos\varphi) = \left| t = \sqrt{2}\cos\varphi, \quad \begin{array}{|c|c|c|} \hline \varphi & 0 & \frac{\pi}{4} \\ \hline t & \sqrt{2} & 1 \\ \hline \end{array} \right| =$$

$$= \frac{4}{3\sqrt{2}}\pi a^3 \int_{1}^{\sqrt{2}} (t^2 - 1)^{\frac{3}{2}} dt.$$

Для обчислення цього інтегралу скористаємося методом інтегрування частинами

$$\underbrace{\int_{1}^{\sqrt{2}} (t^2 - 1)^{\frac{3}{2}} dt}_{I} = \left| \begin{array}{l} \int_{a}^{b} udv = uv\Big|_{a}^{b} - \int_{a}^{b} udv, \\ u = (t^2 - 1)^{\frac{3}{2}}, \quad dt = dv, \\ du = 3t(t^2 - 1)^{\frac{1}{2}} dt, \quad v = t \end{array} \right| = t(t^2 - 1)^{\frac{3}{2}}\Big|_{1}^{\sqrt{2}} - \int_{1}^{\sqrt{2}} t^2 (t^2 - 1)^{\frac{1}{2}} dt =$$

$$= \sqrt{2} - 3\int_{1}^{\sqrt{2}} (t^2 - 1 + 1)(t^2 - 1)^{\frac{1}{2}} dt = \sqrt{2} - 3\underbrace{\int_{1}^{\sqrt{2}} (t^2 - 1)^{\frac{3}{2}} dt}_{I} - 3\int_{1}^{\sqrt{2}} (t^2 - 1)^{\frac{1}{2}} dt.$$

Розв'яжемо отримане рівняння $\underline{\underline{I}} = \sqrt{2} - \underline{\underline{3 \cdot I}} - 3\int_{1}^{\sqrt{2}} (t^2 - 1)^{\frac{1}{2}} dt$

відносно інтегралу $I = \int_{1}^{\sqrt{2}} (t^2 - 1)^{\frac{3}{2}} \, dt$. Отримаємо

$$\int_{1}^{\sqrt{2}} (t^2 - 1)^{\frac{3}{2}} \, dt = \frac{\sqrt{2}}{4} - \frac{3}{4}\int_{1}^{\sqrt{2}} (t^2 - 1)^{\frac{1}{2}} \, dt =$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{4} - \frac{3}{4}\left(\frac{t}{2}\sqrt{t^2-1} - \frac{1}{2}\ln\left|t+\sqrt{t^2-1}\right|\right)\Bigg|_1^{\sqrt{2}} =$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{4} - \frac{3}{4}\left(\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{1}{2}\ln(\sqrt{2}+1)\right) = \frac{3}{8}\ln(\sqrt{2}+1) - \frac{\sqrt{2}}{8}.$$

Знайдемо об'єм тіла обертання лемніскати Бернуллі навколо осі абсцис

$$V = \frac{4}{3\sqrt{2}}\pi a^3\left(\frac{3}{8}\ln(\sqrt{2}+1) - \frac{\sqrt{2}}{8}\right) = \frac{\pi a^3}{4}\left(\sqrt{2}\ln(\sqrt{2}+1) - \frac{2}{3}\right).$$

2567. Обчислити об'єм тіла, утвореного обертанням навколо осі абсцис фігури, обмеженої лінією :

1) $x^4 + y^4 = a^2x^2$; **2)** $x^4 + y^4 = x^3$.

Розв'язання. 1) Для виконання схематичного рисунка кривої $x^4 + y^4 = a^2x^2$, перейдемо до полярних координат за формулами (1).

Одержимо: $\rho^4(\cos^4\varphi + \sin^4\varphi) = a^2\rho^2\cos^2\varphi \quad \Rightarrow \quad \rho^2 = \dfrac{a^2\cos^2\varphi}{\cos^4\varphi + \sin^4\varphi}$

або
$$|\rho| = \frac{|a\cos\varphi|}{\sqrt{\cos^4\varphi + \sin^4\varphi}}.$$

Перш за все зазначимо, що крива симетрична відносно променів $\varphi = \dfrac{\pi}{2}$ та $\varphi = \pi$. Дійсно, нехай $0 \le \varphi \le \dfrac{\pi}{2}$, тоді справедливі рівності $\rho(\varphi) = \rho(\pi - \varphi)$ та $\rho(\varphi) = \rho(2\pi - \varphi)$, оскільки

$$|\rho(\varphi)| = \frac{|a\cos(\pi-\varphi)|}{\sqrt{\cos^4\varphi + \sin^4\varphi}} \quad \text{та} \quad |\rho(2\pi-\varphi)| = \frac{|a\cos(2\pi-\varphi)|}{\sqrt{\cos^4\varphi + \sin^4\varphi}}.$$

Тому дослідимо поведінку функції $|\rho| = \dfrac{|a\cos\varphi|}{\sqrt{\cos^4\varphi + \sin^4\varphi}}$ тільки при $0 \le \varphi \le \dfrac{\pi}{2}$. Припустивши, що $\alpha > 0$, одержимо:

$$\rho = \frac{a\cos\varphi}{\sqrt{\cos^4\varphi + \sin^4\varphi}}, \qquad 0 \le \varphi \le \frac{\pi}{2}.$$

Дослідимо функцію на монотонність за допомогою похідної:

$$\rho'(\varphi) = a\,\frac{-\sin\varphi\sqrt{\sin^4\varphi + \cos^4\varphi} - \dfrac{2\sin^3\varphi\cos\varphi - 2\cos^3\varphi\sin\varphi}{\sqrt{\sin^4\varphi + \cos^4\varphi}}\cos\varphi}{\sin^4\varphi + \cos^4\varphi} =$$

$$= a\,\frac{-\sin\varphi(\sin^4\varphi + \cos^4\varphi) - 2\sin^3\varphi\cos^2\varphi + 2\cos^4\varphi\sin\varphi}{(\sin^4\varphi + \cos^4\varphi)^{\frac{3}{2}}} =$$

$$= a\sin\varphi\,\frac{(\cos^4\varphi - \sin^4\varphi) - 2\sin^2\varphi\cos^2\varphi}{(\sin^4\varphi + \cos^4\varphi)^{\frac{3}{2}}} =$$

$$= a\sin\varphi\,\frac{\cos^2\varphi - \sin^2\varphi - 2\sin^2\varphi\cos^2\varphi}{(\sin^4\varphi + \cos^4\varphi)^{\frac{3}{2}}} =$$

$$= a\sin\varphi\,\frac{2\cos 2\varphi - \sin^2 2\varphi}{2(\sin^4\varphi + \cos^4\varphi)^{\frac{3}{2}}} = a\sin\varphi\,\frac{(\cos^2 2\varphi + 2\cos 2\varphi + 1) - 2}{2(\sin^4\varphi + \cos^4\varphi)^{\frac{3}{2}}} =$$

$$= a\sin\varphi\,\frac{(\cos 2\varphi + 1 - \sqrt{2})(\cos 2\varphi + 1 + \sqrt{2})}{2(\sin^4\varphi + \cos^4\varphi)^{\frac{3}{2}}}.$$

Очевидно, $\rho'(\varphi) > 0 \quad \Leftrightarrow \quad \sin\varphi(\cos 2\varphi + 1 - \sqrt{2}) > 0 \quad \Leftrightarrow$ $\cos 2\varphi + 1 - \sqrt{2} > 0$, оскільки $\sin\varphi > 0$ при $0 \le \varphi \le \dfrac{\pi}{2}$.

Далі $\cos 2\varphi > \sqrt{2} - 1 \quad \Leftrightarrow \quad \varphi \in \left[0;\ \dfrac{1}{2}\arccos(\sqrt{2} - 1)\right]$, де $\dfrac{1}{2}\arccos(\sqrt{2} - 1) \approx 33^\circ$. Отже, функція $\rho(\varphi)$ монотонно зростає на проміжку $\left[0;\ \dfrac{1}{2}\arccos(\sqrt{2} - 1)\right]$ і монотонно спадає на проміжку

$\left[\frac{1}{2}\arccos(\sqrt{2}-1);\ \ \frac{\pi}{2}\right].$

Тоді схематичний графік кривої має вигляд, зображений на рис. 65.

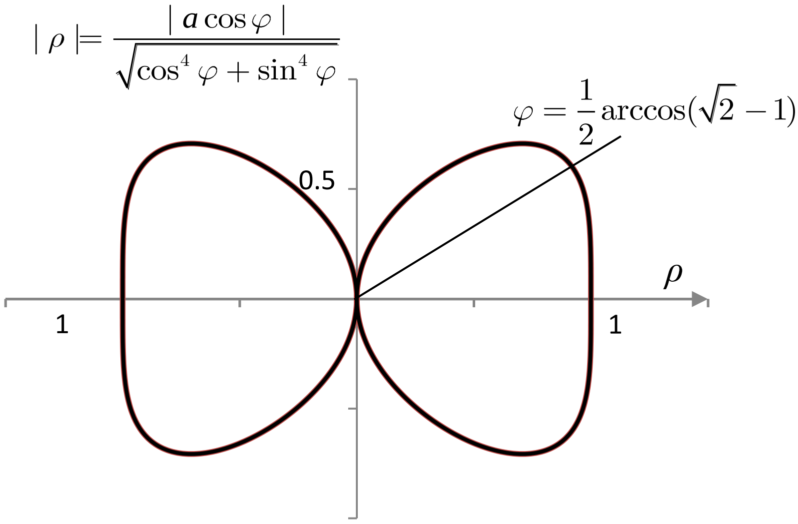


Рис. 65

Знайдемо об'єм тіла обертання кривої навколо полярної осі за формулою

$$V = 2\cdot\frac{2}{3}\pi\int\limits_{\alpha}^{\beta}\rho^3(\varphi)\sin\varphi\, d\varphi =$$

$$= \frac{4}{3}\pi a^3\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos^3\varphi\sin\varphi}{(\cos^4\varphi+\sin^4\varphi)^{\frac{3}{2}}}\,d\varphi = \left| \begin{array}{l} u=\cos\varphi, \begin{array}{|c|c|c|}\hline \varphi & 0 & \frac{\pi}{2} \\ \hline u & 1 & 0 \\ \hline\end{array} \\ du=-\sin\varphi d\varphi \end{array}\right| =$$

$$= \frac{4\pi a^3}{3}\int\limits_0^1\frac{u^3du}{((1-u^2)^2+u^4)^{\frac{3}{2}}} = \frac{2\pi a^3}{3}\int\limits_0^1\frac{u^2du^2}{((1-u^2)^2+u^4)^{\frac{3}{2}}} = \left| t=u^2, \begin{array}{|c|c|c|}\hline u & 0 & 1 \\ \hline t & 0 & 1 \\ \hline\end{array}\right| =$$

$$= \frac{2\pi a^3}{3}\int\limits_0^1\frac{tdt}{(1-2t+2t^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{2\pi a^3}{3\cdot 2^{\frac{3}{2}}}\int\limits_0^1\frac{tdt}{(t^2-t+\frac{1}{2})^{\frac{3}{2}}} = \frac{\pi a^3}{3\sqrt{2}}\int\limits_0^1\frac{tdt}{\left[(t-\frac{1}{2})^2+\frac{1}{4}\right]^{\frac{3}{2}}} =$$

$$= \left| \begin{array}{l} z=t-\frac{1}{2}, \begin{array}{|c|c|c|}\hline t & 0 & 1 \\ \hline z & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \hline\end{array} \\ dt=dz \end{array}\right| = \frac{\pi a^3}{3\sqrt{2}}\int\limits_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}}\frac{(z+\frac{1}{2})dz}{(z^2+\frac{1}{4})^{\frac{3}{2}}} = \frac{\pi a^3}{3\sqrt{2}}\underbrace{\int\limits_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}}\frac{zdz}{(z^2+\frac{1}{4})^{\frac{3}{2}}}}_{=0} +$$

$$+\frac{\pi a^3}{6\sqrt{2}}\int\limits_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}}\frac{dz}{(z^2+\frac{1}{4})^{\frac{3}{2}}} = \frac{\pi a^3}{3\sqrt{2}}\int\limits_0^{\frac{1}{2}}\frac{dz}{(z^2+\frac{1}{4})^{\frac{3}{2}}} = \left| \begin{array}{l} z=\frac{1}{2}\operatorname{tg}v, \begin{array}{|c|c|c|}\hline z & 0 & \frac{1}{2} \\ \hline v & 0 & \frac{\pi}{4} \\ \hline\end{array} \\ dz=\frac{dv}{2\cos^2 v} \end{array}\right| =$$

$$= \frac{\pi a^3}{6\sqrt{2}} \int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{dv}{\cos^2 v\left(\frac{1}{4} tg^2 v + \frac{1}{4}\right)^{\frac{3}{2}}} = \frac{4\pi a^3}{3\sqrt{2}} \int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} \cos v \, dv = \frac{4\pi a^3}{3\sqrt{2}} \sin v \Bigg|_0^{\frac{\pi}{4}} = \frac{2}{3}\pi a^3.$$

2) Обчислимо об'єм тіла, утвореного обертанням навколо осі абсцис фігури, обмеженої лінією $x^4 + y^4 = x^3$.

Рівняння $x^4 + y^4 = x^3$ в полярній системі координат прийме вигляд $\rho^4(\cos^4\varphi + \sin^4\varphi) = \rho^3\cos^3\varphi \quad \Rightarrow \quad \rho(\varphi) = \dfrac{\cos^3\varphi}{\cos^4\varphi + \sin^4\varphi}$.

Оскільки $\rho(-\varphi) = \rho(\varphi)$, тобто ця функція парна, то її графік симетричний відносно полярної осі. Дослідимо функцію $\rho(\varphi)$ на монотонність. Для цього знайдемо похідну

$$\rho'(\varphi) = \frac{-3\cos^2\varphi\sin\varphi(\cos^4\varphi + \sin^4\varphi) - (-4\cos^3\varphi\sin\varphi + 4\sin^3\varphi\cos\varphi)\cos^3\varphi}{(\cos^4\varphi + \sin^4\varphi)^2} =$$

$$= \frac{-3\cos^6\varphi\sin\varphi - 3\cos^2\varphi\sin^5\varphi + 4\cos^6\varphi\sin\varphi - 4\sin^3\varphi\cos^4\varphi}{(\cos^4\varphi + \sin^4\varphi)^2} =$$

$$= \frac{\cos^6\varphi\sin\varphi - 3\cos^2\varphi\sin^5\varphi - 3\sin^3\varphi\cos^4\varphi - \sin^3\varphi\cos^4\varphi}{(\cos^4\varphi + \sin^4\varphi)^2} =$$

$$= \frac{\cos^6\varphi\sin\varphi - 3\cos^2\varphi\sin^3\varphi(\sin^2\varphi + \cos^2\varphi) - \sin^3\varphi\cos^4\varphi}{(\cos^4\varphi + \sin^4\varphi)^2} =.$$

$$= \frac{\cos^6\varphi\sin\varphi - 3\cos^2\varphi\sin^3\varphi - \sin^3\varphi\cos^4\varphi}{(\cos^4\varphi + \sin^4\varphi)^2} =$$

$$= \sin\varphi \frac{\cos^4\varphi(\cos^2\varphi - \sin^2\varphi) - \dfrac{3}{4}(4\cos^2\varphi\sin^2\varphi)}{(\cos^4\varphi + \sin^4\varphi)^2} =$$

$$= \sin\varphi \frac{\cos^4\varphi\cos 2\varphi - \dfrac{3}{4}\sin^2 2\varphi}{(\cos^4\varphi + \sin^4\varphi)^2} = \sin\varphi \frac{(1 + \cos 2\varphi)^2\cos 2\varphi - 3(1 - \cos^2 2\varphi)}{4(\cos^4\varphi + \sin^4\varphi)^2} =$$

$$=\frac{\sin\varphi(\cos^3 2\varphi+5\cos^2 2\varphi+\cos 2\varphi-3)}{4(\cos^4\varphi+\sin^4\varphi)^2}=$$

$$=\frac{\sin\varphi(\cos 2\varphi+1)(\cos 2\varphi+2+\sqrt{7})(\cos 2\varphi+2-\sqrt{7})}{4(\cos^4\varphi+\sin^4\varphi)^2}.$$

Нехай $0\le\varphi\le\dfrac{\pi}{2}$. Тоді функція $\rho(\varphi)$ монотонно зростає для тих значень φ, що задовольняють умові $\cos 2\varphi>\sqrt{7}-2$, тобто для $\varphi\in\left[0;\ \dfrac{1}{2}\arccos(\sqrt{7}-2)\right]$, де $\dfrac{1}{2}\arccos(\sqrt{7}-2)\approx 25^\circ$. В точці $\varphi=\dfrac{1}{2}\arccos(\sqrt{7}-2)$ функція $\rho(\varphi)$ має максимум.

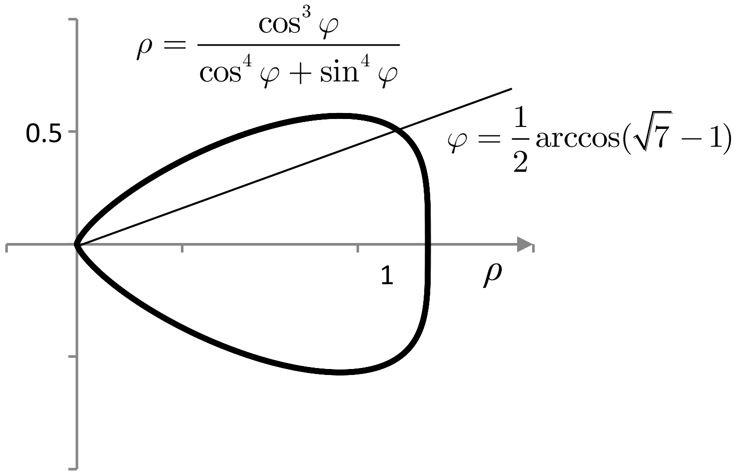


Рис. 66

Тепер неважко побудувати криву $\rho(\varphi)=\dfrac{\cos^3\varphi}{\cos^4\varphi+\sin^4\varphi}$ для $0\le\varphi\le 2\pi$, враховуючи зміну знаку $\cos^3\varphi$ на цьому проміжку (рис. 66).

Нехай фігура, що обмежена побудованою кривою, обертається навколо полярної осі. Знайдемо об’єм тіла, що при цьому утворюється

$$V=\frac{2}{3}\pi\int_\alpha^\beta\rho^3(\varphi)\sin\varphi\,d\varphi=\frac{2}{3}\pi\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos^9\varphi\sin\varphi}{(\cos^4\varphi+\sin^4\varphi)^3}\,d\varphi=$$

$$=\left|\begin{array}{l} u=\cos\varphi,\ \begin{array}{|c|c|c|}\hline \varphi & 0 & \frac{\pi}{2}\\ \hline u & 1 & 0\\ \hline\end{array} \\ du=-\sin\varphi\,d\varphi\end{array}\right|=\frac{2\pi}{3}\int_0^1\frac{u^9du}{((1-u^2)^2+u^4)^3}=\frac{\pi}{3}\int_0^1\frac{u^8du^2}{(2u^4-2u^2+1)^3}=$$

$$=\frac{\pi}{3}\int_0^1\frac{t^4dt}{(2t^2-2t+1)^3}=\frac{\pi}{24}\int_0^1\frac{t^4dt}{(t^2-t+\frac{1}{2})^3}=\frac{\pi}{24}\int_0^1\frac{t^4dt}{\left[(t-\frac{1}{2})^2+\frac{1}{4}\right]^3}=$$

$$= \left| \begin{array}{l} z = t - \dfrac{1}{2}, \quad \begin{array}{|c|c|c|} \hline t & 0 & 1 \\ \hline z & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \hline \end{array} \\ dt = dz \end{array} \right| = \frac{\pi}{24}\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \frac{(z+\frac{1}{2})^4 dz}{(z^2+\frac{1}{4})^3} = \frac{\pi}{24}\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \frac{(z^2+z+\frac{1}{4})^2 dz}{(z^2+\frac{1}{4})^3} =$$

$$= \frac{\pi}{24}\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \frac{[(z^2+\frac{1}{4})+z]^2 dz}{(z^2+\frac{1}{4})^3} = \frac{\pi}{24}\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \frac{(z^2+\frac{1}{4})^2 + 2z(z^2+\frac{1}{4}) + (z^2+\frac{1}{4}) - \frac{1}{4}}{(z^2+\frac{1}{4})^3}\, dz =$$

$$= \frac{\pi}{24}\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \frac{dz}{z^2+\frac{1}{4}} + \underbrace{\frac{\pi}{24}\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \frac{2zdz}{(z^2+\frac{1}{4})^2}}_{=0} + \frac{\pi}{24}\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \frac{dz}{(z^2+\frac{1}{4})^2} - \frac{\pi}{96}\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \frac{dz}{(z^2+\frac{1}{4})^3} =$$

$$= \frac{\pi}{6}\ \operatorname{arctg} 2z\Big|_0^{\frac{1}{2}} + \frac{\pi}{12}\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{dz}{(z^2+\frac{1}{4})^2} - \frac{\pi}{48}\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{dz}{(z^2+\frac{1}{4})^3} = \frac{\pi^2}{24} + \frac{\pi}{12}\cdot I_2\Big|_0^{\frac{1}{2}} - \frac{\pi}{48}\cdot I_3\Big|_0^{\frac{1}{2}}.$$

Обчислимо окремо кожен з інтегралів окремо. Позначимо

$$I_2 = \int \frac{dz}{(z^2+\frac{1}{4})^2}, \quad I_3 = \int \frac{dz}{(z^2+\frac{1}{4})^3}.$$

І для їх обчислення скористаємося **рекурентною формулою** для інтеграла $I_n = \int \dfrac{dz}{(z^2+a^2)^n}, \quad n \in N$:

$$I_n = \frac{z}{2a^2(n-1)(z^2+a^2)^{n-1}} + \frac{1}{a^2}\cdot\frac{2n-3}{2n-2}\cdot I_{n-1}.$$

Отже, оскільки $I_1 = \int \dfrac{dz}{z^2+a^2} = \int \dfrac{dz}{z^2+\frac{1}{4}} = 2\operatorname{arctg} 2z + C$, то

$$I_2 = \frac{z}{2a^2(z^2+a^2)} + \frac{1}{2a^2}\cdot I_1 = \frac{2z}{z^2+\frac{1}{4}} + 2\cdot I_1 = \frac{2z}{z^2+\frac{1}{4}} + 4\operatorname{arctg} 2z + C_1,$$

$$I_3 = \frac{z}{4a^2(z^2+a^2)^2} + \frac{1}{a^2}\cdot\frac{3}{4}\cdot I_2 = \frac{z}{(z^2+\frac{1}{4})^2} + 3\cdot I_2 =$$

$$= \frac{z}{(z^2+\frac14)^2} + \frac{6z}{z^2+\frac14} + 12\,\mathrm{arctg}\,2z + C_2 .$$

Підставивши ці вирази до формули обчислення об’єму, одержимо

$$V = \frac{\pi^2}{24} + \frac{\pi}{12}\left(\frac{2z}{z^2+\frac14} + 4\,\mathrm{arctg}\,2z\right)\Bigg|_0^{\frac12} - \frac{\pi}{48}\left(\frac{z}{(z^2+\frac14)^2} + \frac{6z}{z^2+\frac14} + 12\,\mathrm{arctg}\,2z\right)\Bigg|_0^{\frac12} =$$

$$= \frac{\pi^2}{24} + \frac{\pi}{12}(2+\pi) - \frac{\pi}{48}(8+2\pi) = \frac{\pi^2}{24} + \frac{\pi}{6} + \frac{\pi^2}{12} - \frac{\pi}{6} - \frac{\pi^2}{16} = \frac{\pi^2}{16} .$$

5. ЗАСТОСУВАННЯ ПОЛЯРНИХ КООРДИНАТ ДО РОЗВ’ЯЗАННЯ ЗАДАЧ НА ЗНАХОДЖЕННЯ ПЛОЩІ ПОВЕРХНІ ОБЕРТАННЯ

Площа поверхні обертання

Нехай в ПДСК плоска крива AB (рис. 67) задана рівнянням $y = y(x)$, $a \le x \le b$, де функція $y = y(x)$ та її похідна неперервні на $[a;b]$.

Знайдемо площу поверхні обертання, кривої AB навколо осі Ox.

Візьмемо на дузі AB точки $A, M_1, \dots, M_i, \dots, B$ та проведемо хорди AM_1, $M_1M_2, \dots, M_{n-1}B$, довжини яких позначимо $\Delta\ell_1, \dots, \Delta\ell_n$.

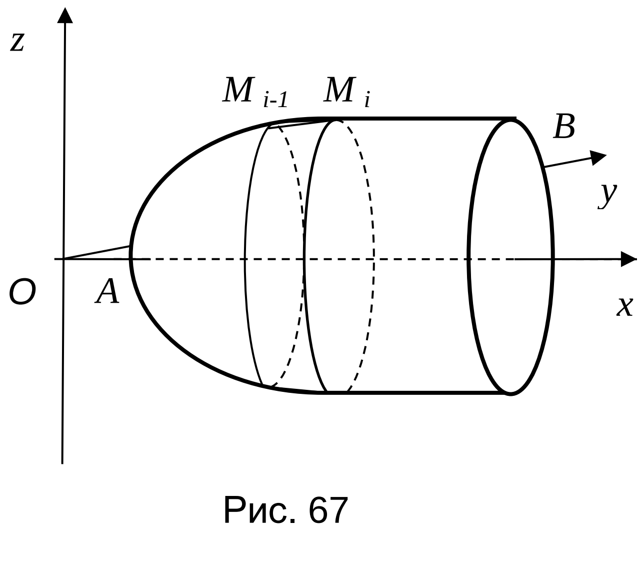


Рис. 67

При обертанні кривої навколо осі Ox кожна хорда утворить зрізаний конус. Площу бічної поверхні зрізаного конуса обчислимо за формулою

$$P_i = 2\pi \cdot \frac{y(x_{i-1}) + y(x_i)}{2} \Delta\ell_i ,$$

де $\Delta\ell_i$ – твірна, $y(x_i)$, $y(x_{i-1})$ – радіуси основ. Тоді площа бічної поверхні при обертанні ламаної, вписаної в дугу AB

$$P_{\text{бічна ламаної}} = \sum_{i=1}^{n} P_i = \sum_{i=1}^{n} 2\pi \cdot \frac{y(x_{i-1}) + y(x_i)}{2} \Delta\ell_i .$$

Оскільки функція $y = y(x)$ – неперевна на відрізку $[a;b]$, то знайдеться така точка $\xi_i \in [x_{i-1}, x_i]$, що $\dfrac{y(x_{i-1}) + y(x_i)}{2} = y(\xi_i)$. Тоді останню формулу можна записати у вигляді

$$P_{\text{бічна ламаної}} = \sum_{i=1}^{n} 2\pi\ y(\xi_i)\ \Delta\ell_i .$$

Площу поверхні обертання знайдемо, як границю інтегральних сум функції $2\pi y(\xi_i)$ при $\lambda = \max\limits_{1 \le i \le n} \Delta\ell_i \to 0$

$$P = \lim_{\lambda \to 0} \sum_{i=1}^{n} 2\pi\ y(\xi_i)\ \Delta\ell_i = 2\pi \int_a^b y(x)\ d\ell .$$

Нехай крива AB в полярних координатах задана рівнянням $\rho = \rho(\varphi)$, де $\rho(\varphi)$ – функція, неперервна разом із своєю похідною першого порядку на відрізку $[\alpha;\beta]$, причому точки $A(\alpha;\rho(\alpha))$, $B(\beta;\rho(\beta))$ та $(\varphi;\rho(\varphi))$, де $\varphi \in [\alpha;\beta]$, належать кривій AB.

Якщо криву AB обертати навколо полярної осі, то одержимо поверхню, площу P якої можна знайти за формулою

$$P = 2\pi \int_\alpha^\beta \underbrace{\rho(\varphi) \sin\varphi}_{y}\ \underbrace{\sqrt{(\rho(\varphi))^2 + (\rho'(\varphi))^2} d\varphi}_{d\ell} .$$

2605. Знайти площу поверхні, утвореної обертанням навколо полярної осі кардіоїди $\rho = a(1 + \cos\varphi)$.

Розв'язання. Поверхню, площу якої ми шукаємо, можна отримати, якщо обертати навколо полярної осі ту частину кардіоїди (рис. 68), що відповідає значенням кута $0 \le \varphi \le \pi$.

Площу поверхні будемо обчислювати за формулою

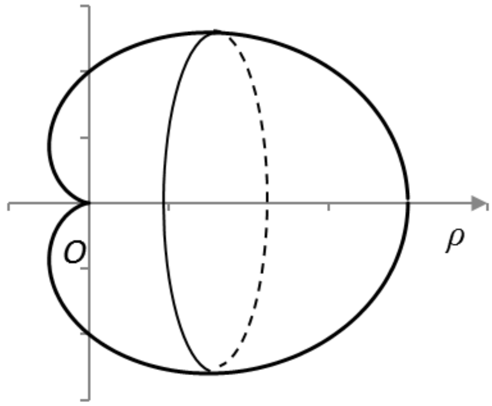


Рис. 68

$$P = 2\pi \int_{\alpha}^{\beta} \rho(\varphi) \sin\varphi \sqrt{(\rho(\varphi))^2 + (\rho'(\varphi))^2}\, d\varphi,$$

де

$\rho(\varphi) = a(1+\cos\varphi), \quad \rho'(\varphi) = -a\sin\varphi,$

$$(\rho(\varphi))^2 + (\rho'(\varphi))^2 =$$

$$= a^2((1+\cos\varphi)^2 + \sin^2\varphi) = a^2(1 + 2\cos\varphi + \cos^2\varphi + \sin^2\varphi) = 2a^2(1+\cos\varphi).$$

$$P = 2\pi \int_0^{\pi} a(1+\cos\varphi)\sin\varphi \sqrt{2a^2(1+\cos\varphi)}\, d\varphi =$$

$$= 2\pi \int_0^{\pi} 2a\cos^2\frac{\varphi}{2} \cdot 2\cos\frac{\varphi}{2}\sin\frac{\varphi}{2} \cdot 2a\cos\frac{\varphi}{2}\, d\varphi = 16\pi a^2 \int_0^{\pi} \cos^4\frac{\varphi}{2} \cdot \sin\frac{\varphi}{2}\, d\varphi =$$

$$= 32\pi a^2 \int_0^{\pi} \cos^4\frac{\varphi}{2} \cdot d\left(\cos\frac{\varphi}{2}\right) = -\frac{32}{5}\pi a^2 \cos^5\frac{\varphi}{2}\bigg|_0^{\pi} = \frac{32}{5}\pi a^2.$$

2606 (6.529). Коло $\rho = 2R\sin\varphi$ обертається навколо полярної осі. Знайти площу поверхні, що при цьому утворюється.

Розв'язання. Площу поверхні обертання (рис. 69) будемо обчислювати за формулою

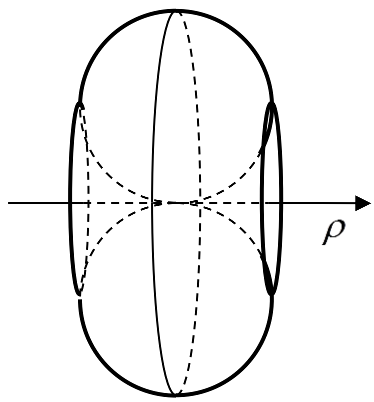


Рис. 69

$$P = 2\pi \int_{\alpha}^{\beta} \rho(\varphi) \sin\varphi \sqrt{(\rho(\varphi))^2 + (\rho'(\varphi))^2}\, d\varphi,$$

де $\quad \rho(\varphi) = 2R\sin\varphi, \quad \rho'(\varphi) = 2R\cos\varphi,$

$$(\rho(\varphi))^2 + (\rho'(\varphi))^2 = 4R^2(\cos^2\varphi + \sin^2\varphi) = 4R^2.$$

Використовуючи симетрію фігури, отримаємо

$$P = 2\cdot 2\pi\int_0^{\frac{\pi}{2}} 2R\sin\varphi\sin\varphi\sqrt{4R^2}\ d\varphi = 16\pi R^2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^2\varphi\ d\varphi =$$

$$= 8\pi R^2\int_0^{\frac{\pi}{2}}(1-\cos 2\varphi)\ d\varphi = 8\pi R^2(\varphi - \frac{1}{2}\sin 2\varphi)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = 4\pi^2R^2.$$

2607. Лемніската $\rho^2 = a^2\cos 2\varphi$ обертається навколо полярної осі. Знайти площу поверхні, що при цьому утворюється.

Розв'язання. Площу поверхні обертання (рис. 64) будемо обчислювати за формулою

$$P = 2\pi\int_\alpha^\beta \rho(\varphi)\sin\varphi\sqrt{(\rho(\varphi))^2 + (\rho'(\varphi))^2}\ d\varphi,$$

де $$\rho(\varphi) = a\sqrt{\cos 2\varphi},\quad \rho'(\varphi) = -a\frac{\sin 2\varphi}{\sqrt{\cos 2\varphi}},$$

$$(\rho(\varphi))^2 + (\rho'(\varphi))^2 = a^2\cos 2\varphi + a^2\frac{\sin^2 2\varphi}{\cos 2\varphi} = \frac{a^2}{\cos 2\varphi}.$$

Використовуючи симетрію фігури, отримаємо

$$P = 2\cdot 2\pi\int_0^{\frac{\pi}{4}} a\sqrt{\cos 2\varphi}\sin\varphi\sqrt{\frac{a^2}{\cos 2\varphi}}\ d\varphi = 4\pi a^2\int_0^{\frac{\pi}{4}}\sin\varphi\ d\varphi =$$

$$= 4\pi a^2\cos\varphi\Big|_0^{\frac{\pi}{4}} = 4\pi a^2\left(1 - \frac{\sqrt{2}}{2}\right) = 2\pi a^2(2-\sqrt{2}).$$

6.531. Довести, що площа поверхні, утвореної при обертанні лемніскати $\rho^2 = a^2\sin 2\varphi$ навколо полярної осі, дорівнює площі поверхні сфери радіуса a.

Розв'язання. 1) Площу поверхні, утвореної при обертанні лемніскати $\rho^2 = a^2\sin 2\varphi$ (рис. 14) навколо полярної осі будемо обчислювати за формулою

$$P = 2\pi\int\limits_{\alpha}^{\beta} \rho(\varphi)\sin\varphi\sqrt{(\rho(\varphi))^2 + (\rho'(\varphi))^2}\ d\varphi,$$

де $$\rho(\varphi) = a\sqrt{\sin 2\varphi}, \quad \rho'(\varphi) = a\frac{\cos 2\varphi}{\sqrt{\sin 2\varphi}},$$

$$(\rho(\varphi))^2 + (\rho'(\varphi))^2 = a^2\sin 2\varphi + a^2\frac{\cos^2 2\varphi}{\sin 2\varphi} = \frac{a^2}{\sin 2\varphi}.$$

Використовуючи симетрію фігури, отримаємо

$$P_1 = 2\cdot 2\pi\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} a\sqrt{\sin 2\varphi}\sin\varphi\sqrt{\frac{a^2}{\sin 2\varphi}}\ d\varphi = 4\pi a^2\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\sin\varphi\ d\varphi =$$

$$= -4\pi a^2\cos\varphi\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = 4\pi a^2.$$

2) Сферу (рис. 70) можна утворити при обертанні кола $\rho = a$, $0\le\varphi\le\pi$ навколо полярної осі. Тоді площа поверхні сфери радіуса a

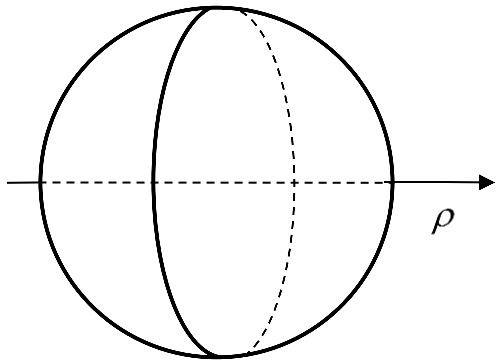


Рис. 70

$$P_2 = 2\pi\int\limits_{\alpha}^{\beta}\rho(\varphi)\sin\varphi\ \sqrt{(\rho(\varphi))^2 + (\rho'(\varphi))^2}d\varphi =$$

$$= \left|\begin{array}{l} \rho(\varphi) = a,\ \ \rho'(\varphi) = 0, \\ \sqrt{(\rho(\varphi))^2 + (\rho'(\varphi))^2} = a, \\ 0\le\varphi\le\pi \end{array}\right| =$$

$$= 2\pi a^2\int\limits_0^{\pi}\sin\varphi\ d\varphi = -2\pi a^2\cos\varphi\Big|_0^{\pi} = 4\pi a^2.$$

Отже, $P_1 = P_2 = 4\pi a^2.$

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. Берман Г.Н. Сборник задач по курсу математического анализа. – М.: Наука, 1969, 1985. – 416 с.
2. Сборник задач по математике (для ВТУЗов). Линейная алгебра и основы математического анализа**.** Под редакцией Ефимова А.В., Демидовича Б.П., – М. Наука, 1981, 1986.
3. Вирченко Н.А., Ляшко И.И., Швецов К.И. Графики функций: Справочник. – К.: Наукова думка, 1979. – 320 с.
4. Ляшко И.И., Боярчук А.К., Гай Я.Г. и др. Справочное пособие по математическому анализу. – Ч. I. Введение в анализ, производные, интеграл. – К.: Вища шк., 1978. – 696 с.
5. Фихтенгольц Г.М. Курс дифференциального и интегрального исчисления. М.: ФИЗМАТГИЗ, 1963. – 656 с.
6. Каплан И. А. Практические занятия по высшей математике. Ч. 1-5. – Харьков, Издательство Харьковского университета, 1967-1972.
7. Щипачев В.С. Основи высшей математики. М.: Высш. шк., 1969. – 479 с.
8. Вірченко Н.О., Ляшко І.І., Швецов К.І. Графіки функцій. Довідник. К.: Наукова думка, 1977. – 320 с.
9. Вірченко Н.О., Ляшко І.І. Графіки елементарних та спеціальних функцій. Довідник. К.: Наукова думка, 1996. – 585 с.

ЗМІСТ